

ESERCIZI DA SVOLGERE A CASA

Gli studenti con **“Piano Didattico Personalizzato”** sono dispensati dallo svolgimento dell’esercizio 2, sebbene il suo svolgimento faciliti l’acquisizione di migliori abilità sugli argomenti affrontati nella lezione.

Risolvere e discutere le seguenti **EQUAZIONI LETTERALI**:

**PRIMA DI RISOLVERE GLI ESERCIZI SOTTOSTANTI,
STUDIARE MOLTO BENE GLI ESERCIZI SVOLTI IN FONDO A
QUESTO DOCUMENTO**

1. $ax^2 - 2(a-2)x + a + 1 = 0$

Per $a \leq \frac{4}{5} \wedge a \neq 0$ $S = \left\{ \frac{a-2 \pm \sqrt{4-5a}}{a} \right\}$

SOLUZ.: per $a > \frac{4}{5}$ $S = \emptyset$

per $a = 0$ $S = \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$

RICORDA nelle equazioni **LETTERALI** di fare **SEMPRE** la **DISCUSSIONE FINALE**

2. $(a-1)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$

SOLUZ.: per $a \neq 1$ $S = \left\{ 1; \frac{a+1}{a-1} \right\}$

per $a = 1$ $S = \{1\}$

Il seguente documento si riferisce alle lezioni del prof. Mario Antonuzzi, tratte dal seguente sito:

<https://www.matematichiamo.it/>

Iscriviti anche tu al **CANALE** e impariamo insieme la matematica!

ESERCIZI AGGIUNTIVI a carattere NON OBBLIGATORIO

Gli esercizi seguenti NON sono obbligatori e costituiscono soltanto un'utile attività di ripasso. Essi non sostituiscono gli esercizi per casa, che hanno carattere obbligatorio e che sono di sopra elencati.

$$11. \quad \frac{2x^2}{a^2 + 4a + 4} + \frac{x}{a + 2} = 1$$

SOLUZ.: per $a \neq -2$ $S = \left\{ -a - 2; \frac{a + 2}{2} \right\}$
per $a = -2$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

$$12. \quad \frac{kx^2 - 2x}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

SOLUZ.: per $k \neq 0$ $S = \left\{ \frac{1 - k}{k}; \frac{1 + k}{k} \right\}$
per $k = 0$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

$$13. \quad \frac{x}{a - 1} + \frac{x^2 + 6x}{a^2 + a - 2} = 6$$

SOLUZ.: per $a \neq -2 \wedge a \neq 1$ $S = \{2a - 2; -3a - 6\}$
per $a = -2 \vee a = 1$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

$$14. \quad \frac{kx^2 - 2x}{k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

SOLUZ.: per $k \neq 0$ $S = \left\{ \frac{1 - k}{k}; \frac{1 + k}{k} \right\}$
per $k = 0$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

DISCUTIAMO insieme la seguente equazione letterale

$$17. \quad \frac{3a}{(a-1)(x+2)} - \frac{5}{a-1} = \frac{2x}{x+2} + 1$$

SOL: Questa è un'equazione che ha un significato quando $a-1 \neq 0$, cioè quando $a \neq 1$.

In altri termini se $a = 1$ l'equazione non ha alcun significato essendo presenti delle frazioni con denominatori nulli.

Invece, se $a \neq 1$ allora l'equazione ha senso e posso iniziare a risolverla. La prima cosa che faccio è calcolare il Campo di Esistenza per le soluzioni.

Pongo $x+2 \neq 0$, cioè $x \neq -2$. In altri termini, accetterei ogni eventuale soluzione tranne -2.

Calcolo il minimo comune multiplo dei denominatori.

$$\frac{3a-5(x+2)}{(a-1)(x+2)} = \frac{2x(a-1)+(a-1)(x+2)}{(a-1)(x+2)}$$

Ora applico il secondo Principio di Equivalenza delle equazioni e ottengo:

$$3a-5(x+2) = 2x(a-1)+(a-1)(x+2) \quad \text{da cui}$$

$$3a-5x-10 = 2ax-2x+ax+2a-x-2$$

$$3a-5x-10 = 3ax-3x+2a-2$$

$$-3ax+a-2x-8=0$$

$$x(-3a-2) = -a+8$$

Si tratta di un'equazione di PRIMO grado e pertanto non andiamo a studiare il segno del discriminante.

Possiamo solo osservare che se $-3a-2=0$, cioè se $a = -\frac{2}{3}$ l'equazione diventa $0 = \frac{2}{3} + 8$, $0 = \frac{26}{3}$ cioè l'equazione è IMPOSSIBILE.

Invece se $a \neq -\frac{2}{3}$ allora l'equazione sarebbe DETERMINATA e avrebbe come unica soluzione $x = \frac{a-8}{3a+2}$. Ma

questa soluzione sarebbe accettabile? Dipende. Infatti, per lo studio del Campo di Esistenza deve essere $x \neq -2$.

Quindi accetterei $\frac{a-8}{3a+2}$ soltanto se esso è diverso da -2. Quindi se $\frac{a-8}{3a+2} \neq -2$, cioè se $a-8 \neq -6a-4$, quindi

se $a \neq \frac{4}{7}$.

DISCUSSIONE

Se $a = 1$ allora l'equazione perde di significato

Se $a = -\frac{2}{3} \vee a = \frac{4}{7}$ allora l'equazione è impossibile

Se $\left(a \neq 1 \wedge a \neq -\frac{2}{3} \right) \wedge a \neq \frac{4}{7}$ allora l'equazione è DETERMINATA e ha come soluzione $x = \frac{a-8}{3a+2}$

DISCUTIAMO insieme la seguente equazione letterale

$$18. \quad \frac{1}{a-1} + \frac{x^2}{2x-1} = \frac{ax}{a-1}$$

SOL: Questa è un'equazione che ha un significato quando $a-1 \neq 0$, cioè quando $a \neq 1$.

In altri termini se $a = 1$ l'equazione **PERDE DI SIGNIFICATO** essendo presenti delle frazioni con denominatori nulli.

Invece, se $a \neq 1$:

$$\frac{2x-1+x^2(a-1)}{(a-1)(2x-1)} = \frac{2ax^2-ax}{(a-1)(2x-1)}$$

CAMPO DI ESISTENZA: $2x-1 \neq 0$, cioè $x \neq \frac{1}{2}$

$$ax^2 - x^2 - 2ax^2 + 2x + ax - 1 = 0$$

$$(-a-1)x^2 + (2+a)x - 1 = 0$$

- Se $-a-1=0$, cioè se $a=-1$ allora l'equazione si abbassa di grado. Sarà $x-1=0$, cioè $x=1$
- Se $a \neq \pm 1$ allora occorre calcolare il DELTA.

$$\Delta = (2+a)^2 + 4(-a-1) = 4 + a^2 + 4a - 4a - 4 = a^2$$

$\Delta \geq 0$ quando $a^2 \geq 0$, per ogni valore di a

Quindi

$$x_{1,2} = \frac{-2-a \pm \sqrt{a^2}}{-2a-2} = \frac{-2-a \pm a}{-2a-2} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2}{-2a-2} = \frac{1}{a+1} \\ x_2 = \frac{-2-2a}{-2a-2} = 1 \quad (\text{valore sempre accettabile}) \end{cases}$$

Ma $x_1 = \frac{1}{a+1}$ è sempre accettabile? No. Essa è accettabile se non confligge con il Campo di Esistenza, cioè se:

$$\frac{1}{a+1} \neq \frac{1}{2}, \quad a+1 \neq 2, \quad a \neq 1$$

Essendo $a \neq 1$ anche questa soluzione è sempre accettabile.

DISCUSSIONE

- Se $a = 1$ allora l'equazione PERDE di SIGNIFICATO
- Se $a = 1$ allora $S = \{1\}$
- Se $a \neq \pm 1$ allora $S = \left\{ 1; \frac{1}{a+1} \right\}$