ESERCIZI DA SVOLGERE A CASA

Gli studenti con **"Piano Didattico Personalizzato"** sono dispensati dallo svolgimento dell'esercizio 2, sebbene il suo svolgimento faciliti l'acquisizione di migliori abilità sugli argomenti affrontati nella lezione.

Risolvere e discutere le seguenti **EQUAZIONI LETTERALI**:

PRIMA DI RISOLVERE GLI ESERCIZI SOTTOSTANTI, STUDIARE MOLTO BENE GLI ESERCIZI SVOLTI IN FONDO A QUESTO DOCUMENTO

1. $px^2 - 2(p-2)x + p + 1 = 0$

SOLUZ.:
Per $p \le \frac{4}{5} \wedge p \ne 0$ $\quad S=\left\{\frac{p-2\pm\sqrt{4-5p}}{p}\right\}$
per $p > \frac{4}{5}$ $\quad S=\varnothing$
per $p=0$ $\quad S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$

RICORDA nelle equazioni LETTERALI di fare SEMPRE la DISCUSSIONE FINALE

2. $(p-1)x^2 - 2px + p + 1 = 0$

SOLUZ.:
per $p \ne 1$ $\quad S=\left\{1; \frac{p+1}{p-1}\right\}$
per $p=1$ $\quad S=\{1\}$

ESERCIZI AGGIUNTIVI a carattere NON OBBLIGATORIO

Gli esercizi seguenti NON sono obbligatori e costituiscono soltanto un'utile attività di ripasso. Essi non sostituiscono gli esercizi per casa, che hanno carattere obbligatorio e che sono di sopra elencati.

11. $\dfrac{2x^2}{p^2+4p+4}+\dfrac{x}{p+2}=1$

SOLUZ.: per $p \neq -2$ $\quad S=\left\{-p-2;\dfrac{p+2}{2}\right\}$

per $p=-2$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

12. $\dfrac{kx^2-2x}{k}=\left(1-\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$

SOLUZ.: per $k \neq 0$ $\quad S=\left\{\dfrac{1-k}{k};\dfrac{1+k}{k}\right\}$

per $k=0$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

13. $\dfrac{x}{h-1}+\dfrac{x^2+6x}{h^2+h-2}=6$

SOLUZ.: per $h \neq -2 \wedge h \neq 1$ $\quad S=\{2h-2;-3h-6\}$

per $h=-2 \vee h=1$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

14. $\dfrac{x^2}{2k}+\dfrac{(4k-1)x}{2k^2+4k}=\dfrac{2}{k^2+4k+4}$

SOLUZ.: per $k \neq 0 \wedge k \neq -2$ $\quad S=\left\{\dfrac{-4k}{k+2};\dfrac{1}{k+2}\right\}$

per $k=0 \vee k=-2$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

15. $\dfrac{x^2}{m-1}+3+m=\dfrac{2mx}{m-1}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)$

SOLUZ.: per $m \neq 0 \wedge m \neq 1$ $\quad S=\{m+3;m-1\}$

per $m=0 \vee m=1$ EQUAZIONE SENZA SIGNIFICATO

DISCUTIAMO insieme la seguente equazione letterale

21. $$\frac{3a}{(a-1)(x+2)}-\frac{5}{a-1}=\frac{2x}{x+2}+1$$

SOL: Questa è un'equazione che ha un significato quando $a-1\neq 0$, cioè quando $a\neq 1$.

In altri termini se $a=1$ l'equazione non ha alcun significato essendo presenti delle frazioni con denominatori nulli.

Invece, se $a\neq 1$ allora l'equazione ha senso e posso iniziare a risolverla. La prima cosa che faccio è calcolare il Campo di Esistenza per le soluzioni.

Pongo $x+2\neq 0$, cioè $x\neq -2$. In altri termini, accetterei ogni eventuale soluzione tranne -2.

Calcolo il minimo comune multiplo dei denominatori.

$$\frac{3a-5(x+2)}{(a-1)(x+2)}=\frac{2x(a-1)+(a-1)(x+2)}{(a-1)(x+2)}$$

Ora applico il secondo Principio di Equivalenza delle equazioni e ottengo:

$$3a-5(x+2)=2x(a-1)+(a-1)(x+2)$$ da cui

$$3a-5x-10=2ax-2x+ax+2a-x-2$$

$$3a-5x-10=3ax-3x+2a-2$$

$$-3ax+a-2x-8=0$$

$$x(-3a-2)=-a+8$$

Si tratta di un'equazione di PRIMO grado e pertanto non andiamo a studiare il segno del discriminante.

Possiamo solo osservare che se $-3a-2=0$, cioè se $a=-\frac{2}{3}$ l'equazione diventa $0=\frac{2}{3}+8$, $0=\frac{26}{3}$ cioè l'equazione è IMPOSSIBILE.

Invece se $a\neq -\frac{2}{3}$ allora l'equazione sarebbe DETERMINATA e avrebbe come unica soluzione $x=\frac{a-8}{3a+2}$. Ma questa soluzione sarebbe accettabile? Dipende. Infatti, per lo studio del Campo di Esistenza deve essere $x\neq -2$. Quindi accetterei $\frac{a-8}{3a+2}$ soltanto se esso è diverso da -2. Quindi se $\frac{a-8}{3a+2}\neq -2$, cioè se $a-8\neq -6a-4$, quindi se $a\neq \frac{4}{7}$.

DISCUSSIONE

Se $a=1$ allora l'equazione perde di significato

Se $a=-\frac{2}{3}\vee a=\frac{4}{7}$ allora l'equazione è impossibile

Se $\left(a\neq 1\wedge a\neq -\frac{2}{3}\right)\wedge a\neq \frac{4}{7}$ allora l'equazione è DETERMINATA e ha come soluzione $x=\frac{a-8}{3a+2}$

DISCUTIAMO insieme la seguente equazione letterale

22. $$\frac{1}{a-1}+\frac{x^2}{2x-1}=\frac{ax}{a-1}$$

SOL: Questa è un'equazione che ha un significato quando $a-1\neq 0$, cioè quando $a\neq 1$.

In altri termini se $a=1$ l'equazione **PERDE DI SIGNIFICATO** essendo presenti delle frazioni con denominatori nulli.

Invece, se $a\neq 1$:

$$\frac{2x-1+x^2(a-1)}{(a-1)(2x-1)}=\frac{2ax^2-ax}{(a-1)(2x-1)}$$

CAMPO DI ESISTENZA: $2x-1\neq 0$, cioè $x\neq\frac{1}{2}$

$$ax^2-x^2-2ax^2+2x+ax-1=0$$

$$(-a-1)x^2+(2+a)x-1=0$$

- Se $-a-1=0$, cioè se $a=-1$ allora l'equazione si abbassa di grado. Sarà $x-1=0$, cioè $x=1$
- Se $a\neq\pm 1$ allora occorre calcolare il DELTA.

$$\Delta=(2+a)^2+4(-a-1)=4+a^2+4a-4a-4=a^2$$

$\Delta\geq 0$ quando $a^2\geq 0$, per ogni valore di a

Quindi

$$x_{1,2}=\frac{-2-a\pm\sqrt{a^2}}{-2a-2}=\frac{-2-a\pm a}{-2a-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-2}{-2a-2}=\dfrac{1}{a+1} \\ x_2=\dfrac{-2-2a}{-2a-2}=1 \quad \text{(valore sempre accettabile)}\end{cases}$$

Ma $x_1=\frac{1}{a+1}$ è sempre accettabile? No. Essa è accettabile se non confligge con il Campo di Esistenza, cioè se:

$$\frac{1}{a+1}\neq\frac{1}{2},\ \ a+1\neq 2,\ \ a\neq 1$$

Essendo $a\neq 1$ anche questa soluzione è sempre accettabile.

DISCUSSIONE

- Se $a=1$ allora l'equazione PERDE di SIGNIFICATO
- Se $a=-1$ allora $S=\{1\}$
- Se $a\neq\pm 1$ allora $S=\left\{1;\frac{1}{a+1}\right\}$

DISCUTIAMO insieme la seguente equazione letterale

23. $$\frac{k+x}{2x}\left(\frac{k+x}{k-x}+\frac{k-x}{k+x}\right)=k+\frac{2k}{kx-x^2}-1$$

SOL: L'equazione è fratta, poiché nel denominatore compare l'incognita x. Essa ha come Campo di Esistenza $x \neq 0 \wedge x \neq \pm k$

Trasportiamo i termini del secondo membro a sinistra del segno uguale e scomponiamo in fattori i denominatori. Dopo la semplificazione si ha

$$\frac{k^2+x^2}{x(k-x)}-k-\frac{2k}{x(k-x)}+1=0$$

da cui

$$\frac{k^2+x^2-kx(k-x)-2k+x(k-x)}{x(k-x)}=0$$

$$kx^2+(1-k)kx+k^2-2k=0$$

- Se $k=0$, allora l'equazione si abbassa di grado. Sarà $0=0$, cioè l'equazione è indeterminata. In altri termino tutti i valori di x sono soluzione, ad eccezione di quelli che violano le condizioni di esistenza. Quindi: $x \neq 0 \wedge x \neq \pm k$, cioè $x \neq 0$
- Se $k \neq 0$ allora occorre calcolare il DELTA. Attenzione, se volete, in questo caso, potreste anche dividere per k.

  $$\Delta = k^2(1-k)+k^2-2k = k^2-6k+9=(k-3)^2$$

  $\Delta \geq 0$ quando $(k^2-3k)^2 \geq 0$, cioè per ogni valore di k

  Quindi

  $$x_{1,2}=\frac{k(k-1)\pm\sqrt{(k^2-3k)^2}}{2k}=\frac{k^2-k\pm(k^2-3k)}{2k}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2k^2-4k}{2k}=\dfrac{2k(k-2)}{2k}=k-2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

$x=1$ è accettabile? Poiché, in base al Campo di Esistenza, sarà $x \neq \pm k$ allora il valore sarà accettabile se $1 \neq \pm k$, cioè per $k \neq \pm 1$

$x=k-2$ è accettabile? Poiché, in base al Campo di Esistenza, sarà $x \neq 0 \wedge x \neq \pm k$ allora il valore sarà accettabile
se $k-2 \neq 0$, cioè $k \neq 2$
se $k-2 \neq -k$, cioè $2k \neq 2$, cioè $k \neq 1$
se $k-2 \neq k$, cioè $-2 \neq 0$, cioè SEMPRE

DISCUSSIONE

- Se $k=0$ allora l'equazione è INDETERMINATA con $x \neq 0$
- Se $k=1$ allora $S=\{\ \}$
- Se $k=-1$ allora $S=\{k-2\}$
- Se $k \neq \pm 1 \wedge k \neq 2 \wedge k \neq 0$ allora $S=\{1; k-2\}$