ESERCIZI SVOLTI IN CLASSE

Determina per quali valori di k l'equazione $(k+1)x^2-2kx+k+2=0$ con $k\neq-1$, l'equazione:

10. ha 2 soluzioni OPPOSTE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano opposte. Se 2 soluzioni sono opposte allora $x_1=-x_2$, cioè $x_1+x_2=0$, $-\frac{b}{a}=0$, $b=0$. Quindi siamo in presenza di un'equazione pura (vedi punto 6). Pertanto,

$\begin{cases} k\leq-\frac{2}{3}\wedge k\neq-1 \\ k=0 \end{cases}$, per nessun valore di k

11. ha 2 soluzioni una RECIPROCA dell'altra

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano reciproche. Il fatto che siano reciproche si traduce in $x_1=\frac{1}{x_2}$, $x_1\cdot x_2=1$, $\frac{c}{a}=1$, $\frac{k+2}{k+1}=1$, $k+2=k+1$, $2=1$,

$\begin{cases} k\leq-\frac{2}{3}\wedge k\neq-1 \\ 2=1 \end{cases}$, per nessun valore di k

12. ha 2 soluzioni CONCORDI

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano concordi. Se le soluzioni sono concordi allora il loro prodotto è positivo. Quindi, deve essere $\frac{c}{a}>0$, $\frac{k+2}{k+1}>0$.

Questa è una disequazione frazionaria studiabile con il grafico dei segni che ha per soluzione $k<-2\vee k>-1$. Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\leq-\frac{2}{3}\wedge k\neq-1 \\ k<-2\vee k>-1 \end{cases}$ che risolvo con il grafico delle linee: $k<-2\vee-1<k\leq-\frac{2}{3}$

13. ha 2 soluzione DISCORDI

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano discordi. Se le soluzioni sono discordi allora il loro prodotto è negativo. Quindi, deve essere $\frac{c}{a}<0$, $\frac{k+2}{k+1}<0$.

Questa è una disequazione frazionaria che ha per soluzione $-2<k<-1$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\leq-\frac{2}{3}\wedge k\neq-1 \\ -2<k<-1 \end{cases}$ che risolvo con il grafico delle linee: $-2<k<-1$

14. ha 2 soluzioni POSITIVE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano positive. Se entrambe le soluzioni sono positive allora la loro somma e il loro prodotto è positivo. Quindi deve essere $\frac{c}{a}>0 \wedge -\frac{b}{a}>0$. Pertanto devo risolvere il seguente sistema a tre condizioni:

$$\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ \frac{k+2}{k+1} > 0 \\ \frac{2k}{k+1} > 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k < -2 \vee k > -1 \\ k < -1 \vee k > 0 \end{cases}$$

Quindi sarà $k < -2$

15. ha 2 soluzioni NEGATIVE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano negative. Se entrambe le soluzioni sono negative allora la loro somma è negativa e il loro prodotto è positivo. Quindi deve essere $\frac{c}{a}>0 \wedge -\frac{b}{a}<0$. Pertanto, devo risolvere il seguente sistema a tre condizioni:

$$\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ \frac{k+2}{k+1} > 0 \\ \frac{2k}{k+1} < 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k < -2 \vee k > -1 \\ -1 < k < 0 \end{cases}$$

Quindi sarà $-1 < k \le -\frac{2}{3}$

16. ha come DIFFERENZA delle soluzioni 2

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che la differenza delle soluzioni sia 2. La differenza delle soluzioni è data dalla formula $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$. Pertanto, $\frac{\sqrt{-12k-8}}{k+1} = \pm 2$,

$\frac{-12k-8}{(k+1)^2} = 4$, $-12k-8 = 4(k+1)^2$, $-12k-8 = 4k^2+4+8k$, $-4k^2-20k-12=0$,

$4k^2+20k+12=0$, $k^2+5k+3=0$. Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k^2+5k+3=0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

17. ha come SOMMA dei QUADRATI delle soluzioni 7

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Questo equivale a dire che $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 7 + 2x_1x_2$, $(x_1+x_2)^2 = 7+2x_1x_2$, $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 7 + 2\frac{c}{a}$

$$\frac{b^2}{a^2}=7+2\frac{c}{a},\quad \frac{4k^2}{(k+1)^2}=7+2\frac{k+2}{k+1},\quad \frac{4k^2}{(k+1)^2}=\frac{7(k+1)^2+2(k+2)(k+1)}{(k+1)^2},$$

$$4k^2=7\left(k^2+1+2k\right)+2\left(k^2+3k+2\right),\quad -5k^2-20k-11=0,\quad 5k^2+20k+11=0.$$

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\le -\frac{2}{3}\wedge k\ne -1 \\ 5k^2+20k+11=0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2}=\frac{-10\pm 3\sqrt{5}}{5}$

18. ha come SOMMA dei CUBI delle soluzioni 8

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $x_1{}^3+x_2{}^3=8$.

Questo equivale a dire che $\left(x_1+x_2\right)\left(x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2\right)=8$

$\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]=8$. Sapendo che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e che $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ottengo

$$\left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2-3\frac{c}{a}\right]=8,\ \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right]=8,\ \left(-\frac{b}{a}\right)\left[\frac{b^2-3ac}{a^2}\right]=8,\ \frac{-b^3+3abc}{a^3}=\frac{8a^3}{a^3},$$

$$-b^3+3abc=8a^3,\ -(-2k)^3+3(k+1)(-2k)(k+2)=8(k+1)^3,$$

$$8k^3-6k(k^2+3k+2)=8(k^3+1+3k^2+3k),\ 8k^3-6k^3-18k^2-12k=8k^3+8+24k^2+24k,$$

$$-6k^3-18k^2-12k-8-24k^2-24k=0,\ 6k^3+42k^2+36k+8=0,\ 3k^3+21k^2+18k+4=0.$$

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\le -\frac{2}{3}\wedge k\ne -1 \\ 3k^3+21k^2+18k+4=0 \end{cases}$

L'equazione di terzo grado non occorre che sia risolta. Occorre che sia compreso il meccanismo che l'ha generata.

19. ha come somma dei RECIPROCI delle soluzioni 9

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=9$.

Questo equivale a dire che $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}=9$, cioè $x_1+x_2=9\left(x_1\cdot x_2\right)$. Sapendo che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e che $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ottengo $\left(-\frac{b}{a}\right)=9\frac{c}{a}$, $\frac{2k}{k+1}=9\frac{k+2}{k+1}$ $2k=9\left(k+2\right)$, $7k=-18$, $k=-\frac{18}{7}$

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\le -\frac{2}{3}\wedge k\ne -1 \\ k=-\frac{18}{7} \end{cases}$

Quindi sarà $k=-\frac{18}{7}$.

20. ha come somma dei QUADRATI dei RECIPROCI delle soluzioni 10

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $\frac{1}{x_1^{\ 2}}+\frac{1}{x_2^{\ 2}}=10$.

Questo equivale a dire che $\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}}=10$, cioè $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=10\left(x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}\right)$,

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2x_1\cdot x_2=10\left(x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}\right)+2x_1\cdot x_2$, $\quad \left(x_1+x_2\right)^2=10(x_1\cdot x_2)^2+2x_1\cdot x_2$.

Sapendo che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e che $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ottengo $\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2=10\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2+2\frac{k+2}{k+1}$,

$\frac{4k^2}{\left(k+1\right)^2}=10\frac{k^2+4+4k}{\left(k+1\right)^2}+\frac{2k+4}{k+1}$, $\quad \frac{4k^2}{\left(k+1\right)^2}=\frac{10k^2+40+40k+\left(k+1\right)\left(2k+4\right)}{\left(k+1\right)^2}$,

$4k^2=10k^2+40+40k+2k^2+4k+2k+4$, $\quad 8k^2+46k+44=0$, $4k^2+23k+22=0$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\leq-\frac{2}{3}\wedge k\neq-1 \\ 4k^2+23k+22=0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2}=\frac{-23\pm\sqrt{177}}{8}$