ESERCIZI SVOLTI IN CLASSE

Determina per quali valori di k l'equazione $(k+1)x^2-2kx+k+2=0$ con $k \neq -1$, l'equazione:

1. **ha 2 soluzioni REALI**

   Innanzitutto, iniziamo calcolando il Discriminante dell'equazione. Sarà:

   $\frac{\Delta}{4}=k^2-(k+1)(k+2)=k^2-k^2-3k-2=-3k-2$.

   Si devono verificare due condizioni: che le soluzioni siano due ($k \neq -1$ altrimenti diventa un'equazione di primo grado con una soluzione), e che siano reali cioè $\frac{\Delta}{4} \geq 0$. Quindi pongo $\begin{cases} k \neq -1 \\ -3k-2 \geq 0 \end{cases}$ la cui soluzione è $k \leq -\frac{2}{3} \wedge k \neq -1$

2. **ha 2 soluzioni REALI e COINCIDENTI**

   Questo è possibile quando il $\frac{\Delta}{4}=0$, cioè per $k=-\frac{2}{3}$ (la condizione $k \neq -1$ è ininfluente)

3. **ha 2 soluzioni REALI e DISTINTE**

   Si devono verificare due condizioni: che le soluzioni siano due ($k \neq -1$) e $\frac{\Delta}{4}>0$, cioè per

   $k<-\frac{2}{3} \wedge k \neq -1$.

4. **ha tra le sue soluzioni x=2**

   Impongo all'equazione di avere come soluzione x=2. Quindi sostituisco nell'equazione 2 al posto di x. Quindi avrò $(k+1)2^2-2k2+k+2=0$, $4k+4-4k+k+2=0$, $k+6=0$, $k=-6$

5. **è un'equazione SPURIA**

   Un'equazione spuria ha c=0, quindi pongo $k+2=0$, $k=-2$

6. **è un'equazione PURA**

   Un'equazione pura ha b=0, quindi pongo $-2k=0$, $k=0$

7. **è un'equazione MONOMIA**

   Un'equazione monomia ha b=0 e c=0, quindi pongo $\begin{cases} k+2=0 \\ -2k=0 \end{cases}$, $\begin{cases} k=-2 \\ k=0 \end{cases}$, per nessun valore di k

8. **ha come SOMMA delle soluzioni 7**

   La somma delle soluzioni è $-\frac{b}{a}$. Quindi pongo $-\frac{b}{a}=7$, $-\frac{-2k}{k+1}=7$, $2k=7(k+1)$, $2k-7k=7$,

   $-5k=7$, $k=-\frac{7}{5}$

9. **ha come PRODOTTO delle soluzioni -3**

   Il prodotto delle soluzioni è $\frac{c}{a}$. Quindi pongo $\frac{c}{a}=-3$, $\frac{k+2}{k+1}=-3$, $k+2=-3k-3$, $4k=-5$, $k=-\frac{5}{4}$

10. ha 2 soluzioni OPPOSTE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano opposte. Se 2 soluzioni sono opposte allora $x_1 = -x_2$, cioè $x_1 + x_2 = 0$, $-\frac{b}{a} = 0$, $b = 0$. Quindi siamo in presenza di un'equazione pura (vedi punto 6). Pertanto,

$$\begin{cases} k \leq -\frac{2}{3} \wedge k \neq -1 \\ k = 0 \end{cases}$$, per nessun valore di k

11. ha 2 soluzioni una RECIPROCA dell'altra

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano reciproche. Il fatto che siano reciproche si traduce in $x_1 = \frac{1}{x_2}$, $x_1 \cdot x_2 = 1$, $\frac{c}{a} = 1$, $\frac{k+2}{k+1} = 1$, $k + 2 = k + 1$, $2 = 1$,

$$\begin{cases} k \leq -\frac{2}{3} \wedge k \neq -1 \\ 2 = 1 \end{cases}$$, per nessun valore di k

12. ha 2 soluzioni CONCORDI

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano concordi. Se le soluzioni sono concordi allora il loro prodotto è positivo. Quindi, deve essere $\frac{c}{a} > 0$, $\frac{k+2}{k+1} > 0$.

Questa è una disequazione frazionaria studiabile con il grafico dei segni che ha per soluzione $k < -2 \vee k > -1$. Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \leq -\frac{2}{3} \wedge k \neq -1 \\ k < -2 \vee k > -1 \end{cases}$ che risolvo con il grafico delle linee: $k < -2 \vee -1 < k \leq -\frac{2}{3}$

13. ha 2 soluzione DISCORDI

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano discordi. Se le soluzioni sono discordi allora il loro prodotto è negativo. Quindi, deve essere $\frac{c}{a} < 0$, $\frac{k+2}{k+1} < 0$.

Questa è una disequazione frazionaria che ha per soluzione $-2 < k < -1$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \leq -\frac{2}{3} \wedge k \neq -1 \\ -2 < k < -1 \end{cases}$ che risolvo con il grafico delle linee: $-2 < k < -1$

14. ha 2 soluzioni POSITIVE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano positive. Se entrambe le soluzioni sono positive allora la loro somma e il loro prodotto è positivo. Quindi deve essere $\frac{c}{a} > 0 \wedge -\frac{b}{a} > 0$. Pertanto devo risolvere il seguente sistema a tre condizioni:

$$\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ \frac{k+2}{k+1} > 0 \\ \frac{2k}{k+1} > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k < -2 \vee k > -1 \\ k < -1 \vee k > 0 \end{cases}$$

Quindi sarà $k < -2$

15. ha 2 soluzioni NEGATIVE

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che siano negative. Se entrambe le soluzioni sono negative allora la loro somma è negativa e il loro prodotto è positivo. Quindi deve essere $\frac{c}{a} > 0 \wedge -\frac{b}{a} < 0$. Pertanto, devo risolvere il seguente sistema a tre condizioni:

$$\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ \frac{k+2}{k+1} > 0 \\ \frac{2k}{k+1} < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k < -2 \vee k > -1 \\ -1 < k < 0 \end{cases}$$

Quindi sarà $-1 < k \le -\frac{2}{3}$

16. ha come DIFFERENZA delle soluzioni 2

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che la differenza delle soluzioni sia 2. La differenza delle soluzioni è data dalla formula $\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$. Pertanto, $\frac{\sqrt{-12k-8}}{k+1} = \pm 2$,

$\frac{-12k-8}{(k+1)^2} = 4$, $-12k-8 = 4(k+1)^2$, $-12k-8 = 4k^2+4+8k$, $-4k^2-20k-12=0$,

$4k^2+20k+12=0$, $k^2+5k+3=0$. Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \le -\frac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k^2+5k+3=0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

17. ha come SOMMA dei QUADRATI delle soluzioni 7

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Questo equivale a dire che $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 7 + 2x_1x_2$, $(x_1+x_2)^2 = 7 + 2x_1x_2$, $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 7 + 2\frac{c}{a}$

$\frac{b^2}{a^2} = 7 + 2\frac{c}{a}$, $\frac{4k^2}{(k+1)^2} = 7 + 2\frac{k+2}{k+1}$, $\frac{4k^2}{(k+1)^2} = \frac{7(k+1)^2 + 2(k+2)(k+1)}{(k+1)^2}$,

$4k^2 = 7(k^2+1+2k) + 2(k^2+3k+2)$, $-5k^2-20k-11=0$, $5k^2+20k+11=0$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \le -\dfrac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ 5k^2 + 20k + 11 = 0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 3\sqrt{5}}{5}$

18. ha come SOMMA dei CUBI delle soluzioni 8

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $x_1{}^3 + x_2{}^3 = 8$.

Questo equivale a dire che $\left(x_1 + x_2\right)\left(x_1{}^2 - x_1 x_2 + x_2{}^2\right) = 8$

$\left(x_1 + x_2\right)\left[\left(x_1 + x_2\right)^2 - 3x_1 x_2\right] = 8$. Sapendo che $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e che $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ ottengo

$\left(-\dfrac{b}{a}\right)\left[\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2 - 3\dfrac{c}{a}\right] = 8$, $\left(-\dfrac{b}{a}\right)\left[\dfrac{b^2}{a^2} - 3\dfrac{c}{a}\right] = 8$, $\left(-\dfrac{b}{a}\right)\left[\dfrac{b^2 - 3ac}{a^2}\right] = 8$, $\dfrac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \dfrac{8a^3}{a^3}$,

$-b^3 + 3abc = 8a^3$, $-(-2k)^3 + 3(k+1)(-2k)(k+2) = 8(k+1)^3$,

$8k^3 - 6k(k^2 + 3k + 2) = 8(k^3 + 1 + 3k^2 + 3k)$, $8k^3 - 6k^3 - 18k^2 - 12k = 8k^3 + 8 + 24k^2 + 24k$,

$-6k^3 - 18k^2 - 12k - 8 - 24k^2 - 24k = 0$, $6k^3 + 42k^2 + 36k + 8 = 0$, $3k^3 + 21k^2 + 18k + 4 = 0$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \le -\dfrac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ 3k^3 + 21k^2 + 18k + 4 = 0 \end{cases}$

L'equazione di terzo grado non occorre che sia risolta. Occorre che sia compreso il meccanismo che l'ha generata.

19. ha come somma dei RECIPROCI delle soluzioni 9

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 9$.

Questo equivale a dire che $\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = 9$, cioè $x_1 + x_2 = 9\left(x_1 \cdot x_2\right)$. Sapendo che $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ e che

$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ ottengo $\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 9\dfrac{c}{a}$, $\dfrac{2k}{k+1} = 9\dfrac{k+2}{k+1}$ $\quad 2k = 9\left(k+2\right)$, $7k = -18$, $k = -\dfrac{18}{7}$

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k \le -\dfrac{2}{3} \wedge k \ne -1 \\ k = -\dfrac{18}{7} \end{cases}$

Quindi sarà $k = -\dfrac{18}{7}$.

20. ha come somma dei QUADRATI dei RECIPROCI delle soluzioni 10

Si devono verificare due condizioni: che ci siano due soluzioni reali (vedi punto 1), e che $\frac{1}{x_1^{\ 2}}+\frac{1}{x_2^{\ 2}}=10$.

Questo equivale a dire che $\frac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}}=10$, cioè $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=10\left(x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}\right)$,

$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+2x_1\cdot x_2=10\left(x_1^{\ 2}\cdot x_2^{\ 2}\right)+2x_1\cdot x_2$, $\quad \left(x_1+x_2\right)^2=10(x_1\cdot x_2)^2+2x_1\cdot x_2$.

Sapendo che $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e che $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$ ottengo $\left(\frac{2k}{k+1}\right)^2=10\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^2+2\frac{k+2}{k+1}$,

$\frac{4k^2}{\left(k+1\right)^2}=10\frac{k^2+4+4k}{\left(k+1\right)^2}+\frac{2k+4}{k+1}$, $\quad \frac{4k^2}{\left(k+1\right)^2}=\frac{10k^2+40+40k+\left(k+1\right)\left(2k+4\right)}{\left(k+1\right)^2}$,

$4k^2=10k^2+40+40k+2k^2+4k+2k+4$, $\quad 8k^2+46k+44=0$, $4k^2+23k+22=0$.

Ottengo quindi il seguente sistema $\begin{cases} k\le -\frac{2}{3}\wedge k\ne -1 \\ 4k^2+23k+22=0 \end{cases}$

Quindi sarà $k_{1,2}=\frac{-23\pm\sqrt{177}}{8}$