<u>TEOREMA DI PITAGORA</u>. Il **quadrato** costruito sull'**ipotenusa** di un triangolo rettangolo

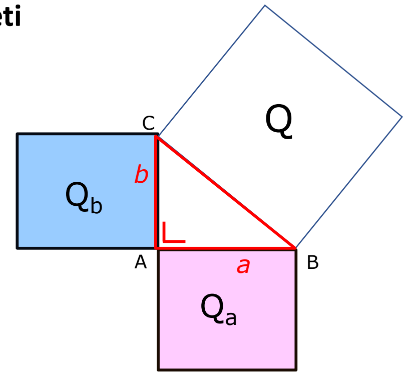
è equivalente

alla **somma** dei **quadrati** costruiti sui **cateti**

IPO:
ABC triangolo rettangolo
Q_a e Q_b sono i quadrati costruiti sui cateti a e b

Q è il quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo

TESI:
$Q = Q_a + Q_b$



1

DIM:

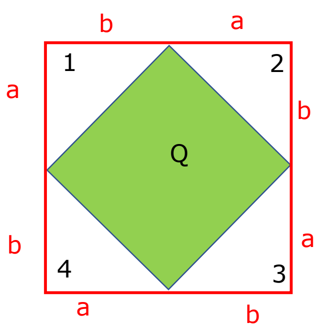
TESI: Q=Qa+Qb

Costruisco il quadrato di lato a+b e lo scompongo in due modi differenti

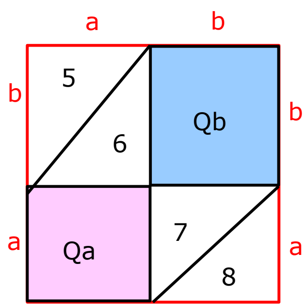
Essendo congruenti i due quadrati di lati a+b ed
essendo congruenti i quattro triangoli rettangoli della prima e della seconda figura

Sono congruenti le aree delle figure che si ottengono per sottrazione

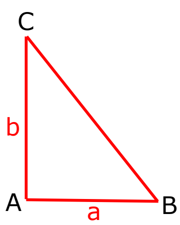
Q=Qa+Qb



Il quadrato è stato scomposto nei quattro triangoli rettangoli e nel quadrato



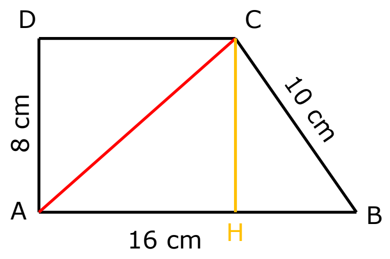
Il quadrato è stato scomposto nei quattro triangoli rettangoli e nei due quadrati



Triangolo rettangolo originario di cateti a e b

ESEMPIO

Determina la lunghezza della diagonale AC del trapezio rettangolo ABCD



PASSO 1: per determinare AC devo applicare il teorema di Pitagora al triangolo ACD. Devo però conoscere CD.

PASSO 2: traccio l'altezza CH=AD=8cm. Calcolo CD applico il teorema di Pitagora al triangolo CHB

$CH^2 + HB^2 = CB^2 \longrightarrow 8^2+HB^2=10^2 \longrightarrow HB^2=36 \longrightarrow HB=6$

$CD=AH=AB-HB=16cm-6cm=10cm$

PASSO 3: ora posso applicare il teorema di pitagora al triangolo ADC

$AH^2=AD^2+CD^2 \longrightarrow AC^2=8^2+10^2 \longrightarrow AC^2=164 \longrightarrow AC=2\sqrt{41}$

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI PITAGORA

Misura della diagonale del quadrato e alcune sue conseguenze

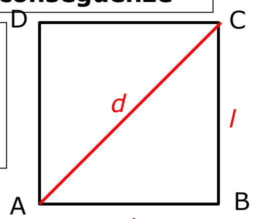
Applicando il teorema di Pitagora:

$d^2=l^2 + l^2 \qquad d^2 = 2l^2$

quindi:

$d=l\sqrt{2}$

La misura della diagonale di un quadrato è uguale al prodotto della misura del suo lato per la radice quadrata di 2

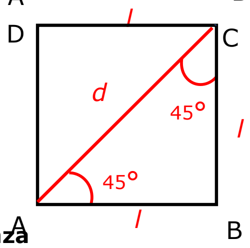


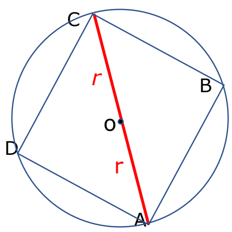
Con il **triangolo rettangolo isoscele** (metà di un quadrato):

$d = l\sqrt{2}$

$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$

La misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele è uguale al prodotto della misura di un cateto per la radice quadrata di 2





Quadrato inscritto in una circonferenza

La diagonale AC è il diametro perché ABC è retto:

$AC= AB\sqrt{2}$ equivale a $2r = AB\sqrt{2}$ $\quad AB= \frac{2r}{\sqrt{2}}= r\sqrt{2}$

In una circonferenza il cui raggio misura r la misura del lato di ogni quadrato inscritto è il prodotto di r per la radice quadrata di 2

APPLICAZIONI

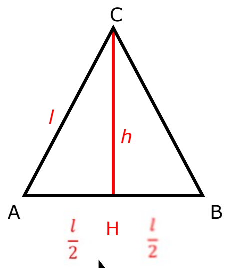
Misura dell'altezza di un triangolo equilatero e alcune sue conseguenze

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \qquad h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4}l^2$$

La misura dell'altezza di un triangolo equilatero è uguale al prodotto della misura della metà del suo lato per la radice quadrata di 3.

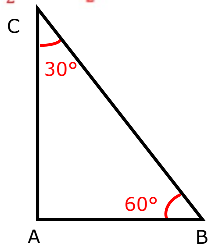
Quindi:

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



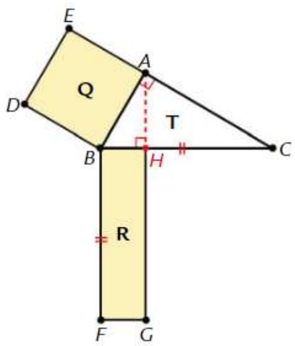
Se un triangolo rettangolo ha gli angoli acuti di 30° e 60°allora esso è la metà di un triangolo equilatero
Quindi i suoi cateti misurano:

$$\frac{l}{2} \text{ e } \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



1° teorema di Euclide

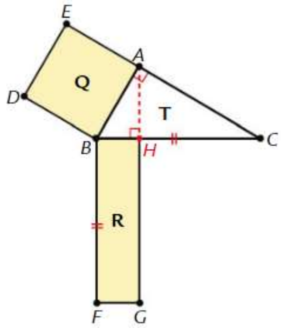
In un triangolo rettangolo, il **quadrato** costruito su un **cateto** è **equivalente** al **rettangolo** che ha per dimensioni l'**ipotenusa** e la **proiezione** del cateto sull'ipotenusa.



DIMOSTRAZIONE

IPOTESI: **T** è un triangolo rettangolo, di ipotenusa BC.
Q è il quadrato costruito sul cateto AB.
R è il rettangolo con un lato coincidente con BH e l'altro congruente a BC.

TESI: **Q ≅ R**



TESI: Q ≅ R

DIMOSTRAZIONE

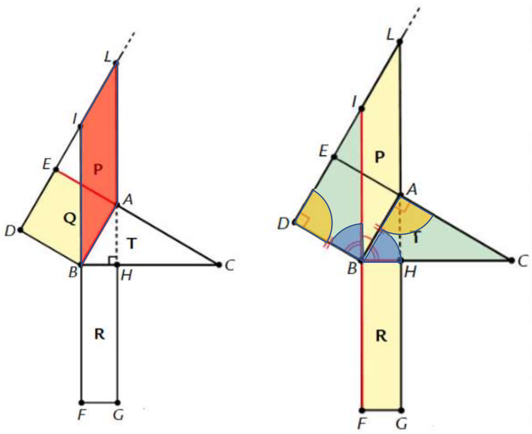
DIMOSTAZIONE Q ≅ P

- Si traccia il prolungamento di DE e si chiamano L ed I i punti d'intersezione con i prolungamenti di FB e GH.
Si ottiene così un parallelogramma ABIL (**P**).
- **P** ≅ **Q**, perché rispetto alla base in comune AB hanno la stessa altezza AE.

DIMOSTAZIONE P ≅ R

- Si prendono in considerazione i triangoli BDI ed ABC:

AB ≅ BD, perché ABDE (Q) è quadrato
BAC ≅ BDI, perché entrambi retti
IBD ≅ ABC, perché entrambi complementari dell'angolo ABI
BDI ≅ ABC, per il secondo criterio
In particolare BI ≅ BC, per costruzione BC ≅ BF, **BI** ≅ **BF**
Quindi **P** ≅ **R**, perché BI ≅ BF e hanno stessa altezza.



SE Q ≅ P E P ≅ R ALLORA **Q** ≅ **R**

COROLLARIO

Dal 1° teorema di Euclide si può derivare il teorema di Pitagora.

Per il 1° teorema di Euclide

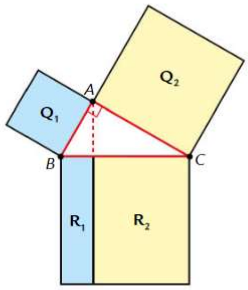
$$Q_1 \doteq R_1 \text{ e } Q_2 \doteq R_2$$

Poiché somme di figure equivalenti sono equivalenti:

$$\text{allora} \quad Q_1 + Q_2 \doteq R_1 + R_2$$

Ciò esprime il teorema di Pitagora:

- Q_1 è il quadrato costruito su un cateto;
- Q_2 è il quadrato costruito sull'altro cateto;
- $R_1 + R_2$ è il quadrato costruito sull'ipotenusa.



SECONDO TEOREMA di EUCLIDE

In un triangolo rettangolo il ***quadrato*** *costruito* ***sull'altezza*** *relativa all'ipotenusa*

è ***equivalente***

al rettangolo che ha ***i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa***

Ipotesi:

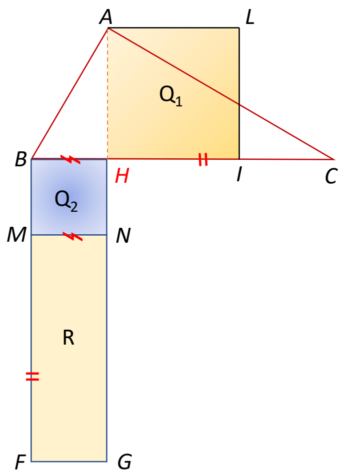
1) *ABC* è un triangolo rettangolo, di ipotenusa *BC* e *AH* è l'altezza relativa a *BC*

2) Q_1 è il quadrato costruito su *AH* e Q_2 è il quadrato costruito su *BH*

3) R il rettangolo i cui lati *MN* e *MF* sono congruenti a *BH* e *HC*

Tesi:

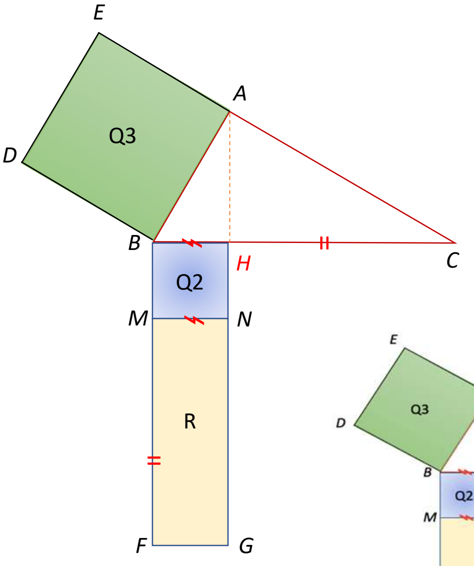
$$Q_1 \doteq R$$

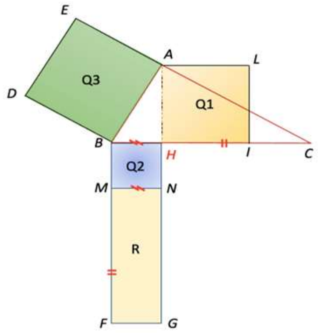


Dimostrazione

1) Per il Primo teorema di Euclide applicato sul triangolo ABC deduciamo che:

$$Q_3 \doteq Q_2 + R$$

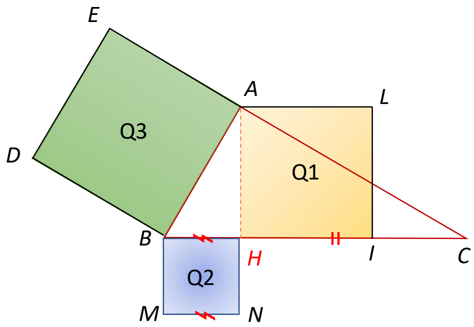


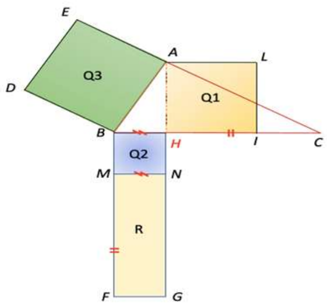


inoltre

2) Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo ABH deduciamo che:

$$Q_3 \doteq Q_2 + Q_1$$

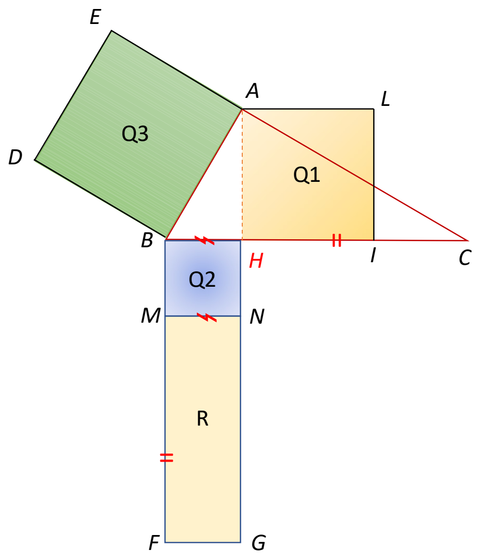




Conclusione

$$Q_3 \doteq Q_2 + R$$
$$Q_3 \doteq Q_2 + Q_1$$
$$Q_2 + R \doteq Q_2 + Q_1$$

$$R \doteq Q_1$$



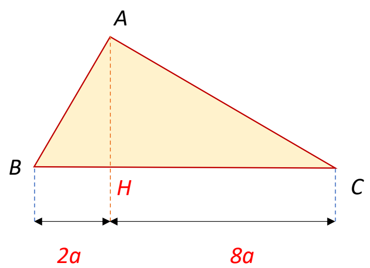
ESEMPIO – applicazione del secondo teorema di Euclide

I dati del problema sono:

- **ABC triangolo rettangolo**
- **BH = 2a**
- **HC = 8a**

Devo calcolare

A = ?



Svolgimento:

Per il secondo teorema di Euclide $AH^2 = BH \times HC$

$$AH = \sqrt{BH} \cdot \sqrt{CH} = \sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a} = \sqrt{16a^2} = 4a$$
$$AREA = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} 10a \cdot 4a = 20a^2$$

Le relazioni fra le misure dei lati di un triangolo rettangolo

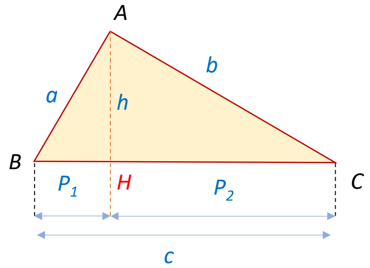
Relazioni:

a. Teorema di Pitagora $a^2 + b^2 = c^2$

b. Primo teorema di Euclide

$a^2 = p_1c$ $b^2 = p_2c$

c. Secondo teorema di Euclide $h^2 = p_1p_2$



Si può ricavare un ulteriore relazione uguagliando l'espressione dell'area del triangolo che si ottiene considerando

- come base AB (1/2 *ab*)

all'espressione che si ottiene considerando

- come base BC (cioè 1/2 *ch*)

d. Uguaglianza delle aree $ab = ch$

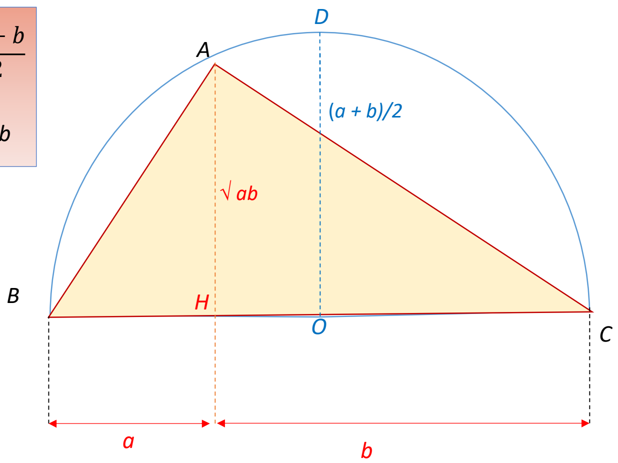
Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

Attraverso l'utilizzo del secondo teorema di Euclide si può dimostrare geometricamente la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica con due numeri reali e non negativi

MEDIA ARITMETICA DI 2 NUMERI REALI POSITIVI: $\frac{a+b}{2}$

MEDIA GEOMETRICA DI 2 NUMERI REALI POSITIVI: $\sqrt{ab}$

- $h = \sqrt{ab}$ poiché $h^2 = ab$
- $r = (a + b)/2$ poiché ½ ab



Disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica

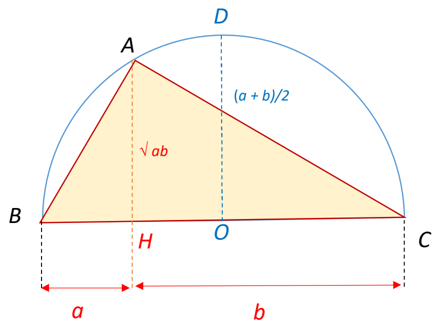
Attraverso l'utilizzo del secondo teorema di Euclide si può dimostrare geometricamente la disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica con due numeri reali e non negativi

La media geometrica è sempre minore o uguale alla media aritmetica quindi otteniamo la formula $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ con $a \geq 0$ e $b \geq 0$

Quindi:

- $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$
- $2\sqrt{ab} \leq a+b$
- $4ab \leq (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
- $(a-b)^2 \geq 0$

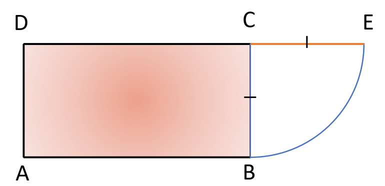
Quindi è **sempre vera** per ogni valore di ***a*** e ***b*** poiché un quadrato è sempre maggiore o uguale a zero



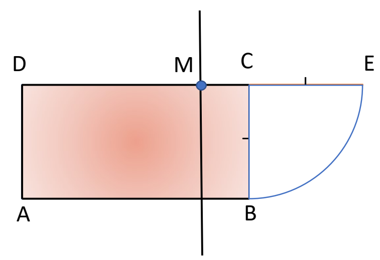
La quadratura dei poligoni

Attraverso i teoremi di Euclide possiamo anche individuare una costruzione che permette di costruire su un rettangolo un quadrato equivalente.

1) Costruiamo sul prolungamento di **DC** dalla parte di **C** il punto **E** tale che **CE=CB**



2) Costruiamo il punto medio **M** di **ED**

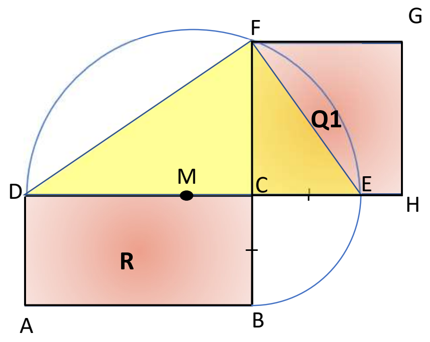


La quadratura dei poligoni

3)Tracciamo la semicirconferenza di diametro **DE** e indichiamo con **F** il punto in cui incontra la retta **CB**

4)Costruiamo il quadrato **CFGH** di lato **FC**

5)Per il secondo teorema di Euclide applicato sul triangolo ***DEF*** segue che il quadrato ***CFGH*** è equivalente al rettangolo ***ABCD***



$$R \doteq Q_1$$

Segmenti in proporzione

I segmenti sono proporzionali quando il loro rapporto è uguale

Dati

AB=8cm
CD=4cm

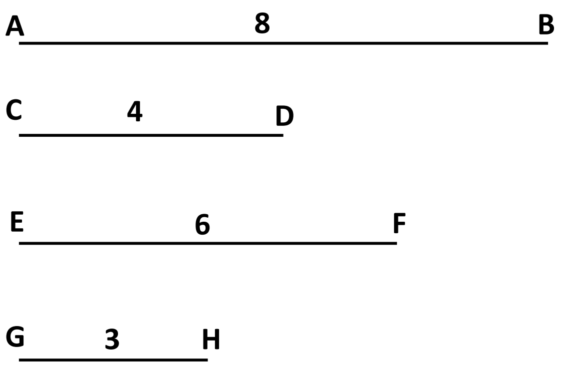
EF=6cm
GH=3cm

Incognita

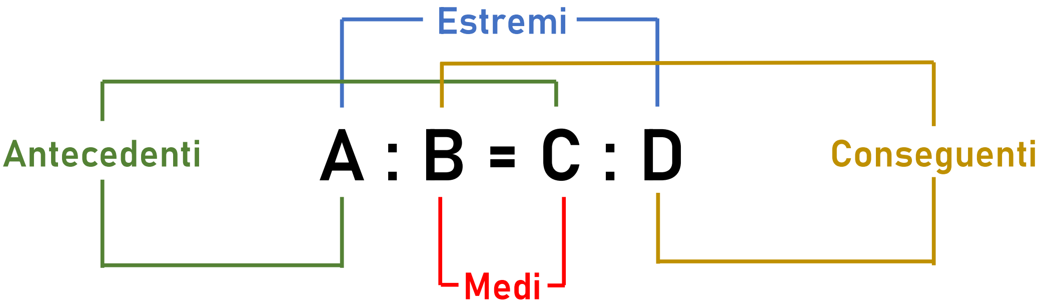
$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Dimostrazione

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \qquad \frac{8}{4} = \frac{6}{3} \qquad 2=2$$



Termini delle proporzioni



Proprietà delle proporzioni

Considerando come struttura: a : b = c : d

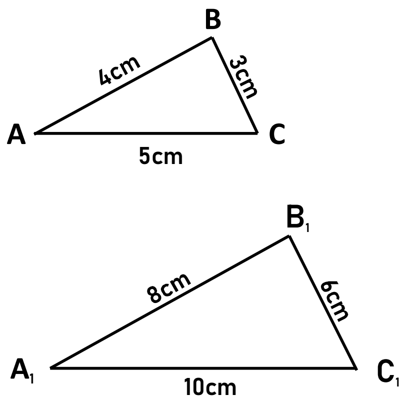
Proprietà	Spiegazione	Proporzione
Dell'invertire	Scambiando l'antecedente con il proprio conseguente si ottiene una proporzione.	b : a = d : c
Del permutare	Scambiando gli estremi o i medi si ottiene una proporzione.	a : c = b : d d : b = c : a
Del comporre	La somma tra i termini al primo membro sta a un componente del primo membro come la somma del secondo membro sta a un componente del secondo membro	(a + b) : a = (c + d) : c (a + b) : b = (c + d) : d
Dello scomporre	La differenza tra i termini al primo membro sta a un componente del primo membro come la differenza del secondo membro sta a un componente del secondo membro	(a – b) : a = (c – d) : c (a – b) : b = (c – d) : d

Proprietà della catena di rapporti

In una catena di rapporti la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come qualunque degli antecedenti sta al proprio conseguente.

Dati

AB=4cm	A_1B_1=8cm
BC=3cm	B_1C_1=6cm
CA=5cm	C_1A_1=10cm



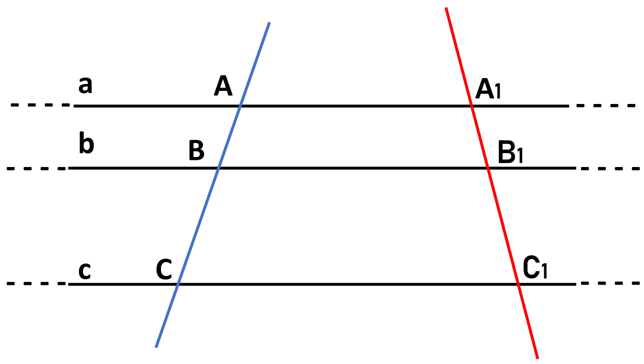
Dimostrazione

$$\frac{AB+BC+CA}{A_1B_1+B1C_1+C_1A_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\frac{4+3+5}{8+6+10} = \frac{3}{6} \qquad \frac{12}{24} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Teorema di Talete

Dato un fascio di rette parallele tagliate da 2 trasversali, il rapporto tra i segmenti di una trasversale create dalle rette è proporzionale al rapporto tra i segmenti della seconda trasversale create dalle rette

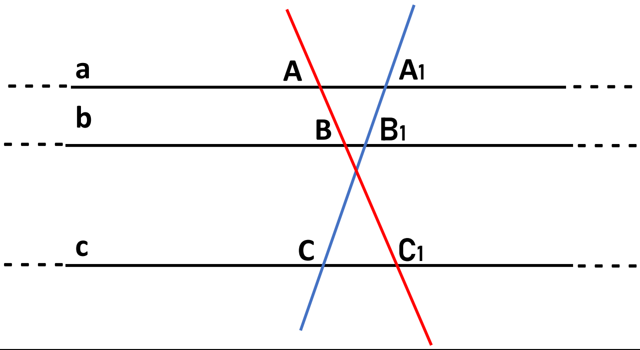


Ipotesi

a // b // c

Tesi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$$



Attenzione

Le trasversali non devono necessariamente essere disgiunte è possibile che le traversali si incontrino in un singolo punto

Dimostrazione teorema di Talete

Si deve trovare il MCD dei segmenti AB e BC e si tracciano sui punti delle rette parallele al fascio di rette iniziali e diamo un nome al numero dei nuovi segmenti.

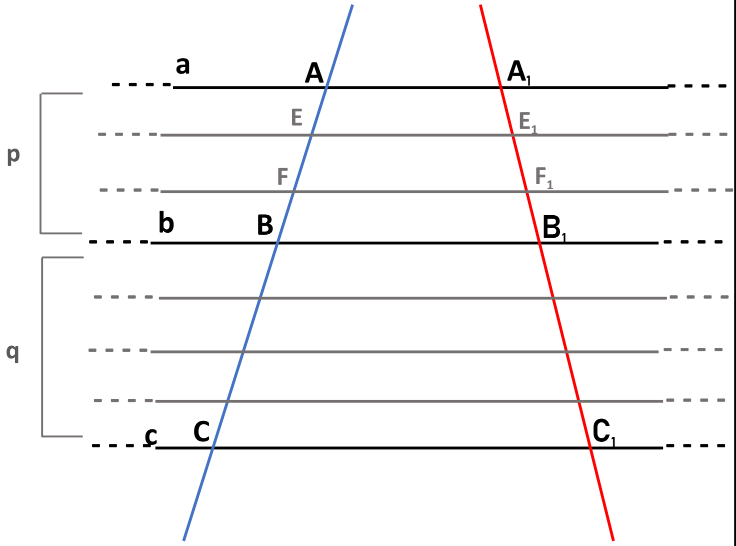
$(p, q) \in N - (0)$ $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$

Grazie alle rette create dai punti EF si sono creati nella seconda trasversale altri segmenti uguali tra loro, chiamati E_1F_1.

$AB = p \times EF$
$BC = q \times EF$

$A_1B_1 = p \times E_1F_1$
$B_1C_1 = q \times E_1F_1$

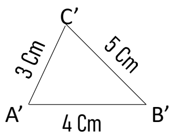
$\frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{p}{q}$ $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$



Triangoli simili

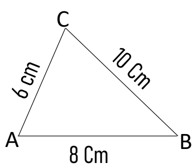
Definizione:
Due **triangoli** si dicono **simili** se i loro angoli sono rispettivamente congruenti e i *lati opposti* agli angoli congruenti sono *proporzionali.*

Esempio:
I due triangoli $A\hat{B}C$ e $A'\hat{B}'C'$ sono simili perché:
$\hat{A} \cong \hat{A}'$ $\hat{B} \cong \hat{B}'$ $\hat{C} \cong \hat{C}'$ e $A'B' : AB = B'C' : BC = A'C' : AC$

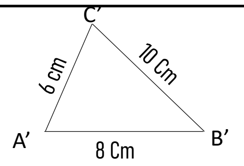


I lati opposti agli angoli congruenti come AB e A'B' si dicono **corrispondenti**

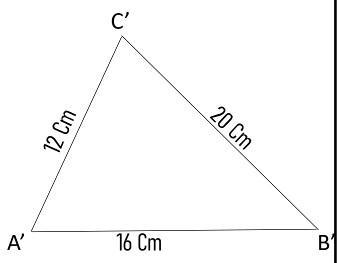
Il rapporto $k = A'B' : AB = B'C' : BC = A'C' : AC$ si chiama **rapporto di similitudine**



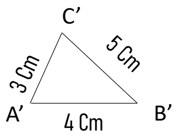
Triangoli simili

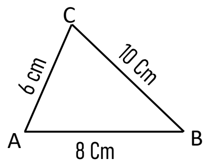


Essendo un rapporto tra misure, k è sempre un numero **positivo**, in particolare:



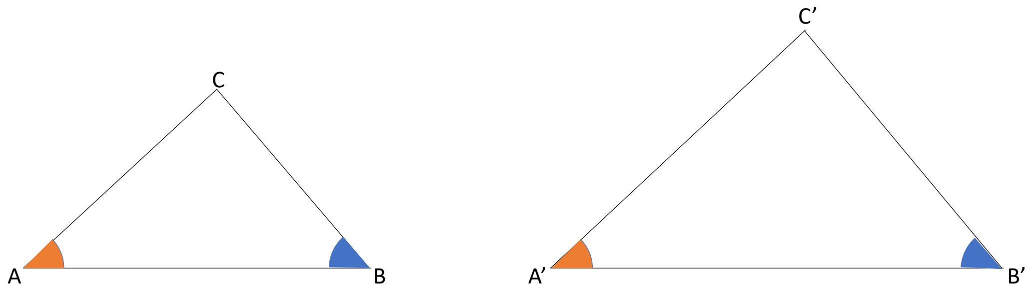
- Se $0 < k < 1$, il triangolo A’B’C’ risulta più piccolo di ABC
- Se $k = 1$, i due triangoli sono congruenti
- Se $k > 1$, il triangolo A’B’C’ risulta più grande di ABC





Primo criterio di similitudine

Enunciato: Se due triangoli hanno due angoli rispettivamente **congruenti**, allora sono **simili**
IPOTESI: $\hat{A} \cong \hat{A}'$, $\hat{B} \cong \hat{B}'$ TESI: ABC ~ A’B’C’

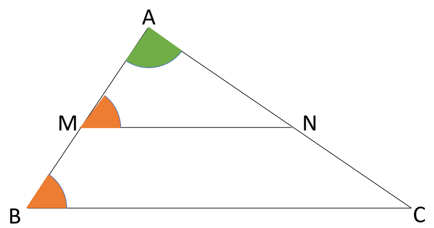


Primo criterio di similitudine

Applicazione del primo criterio:

In un triangolo ABC:
- Sia MN una corda parallela a BC
- Con M appartenente ad AB
- Ed N appartenente ad AC

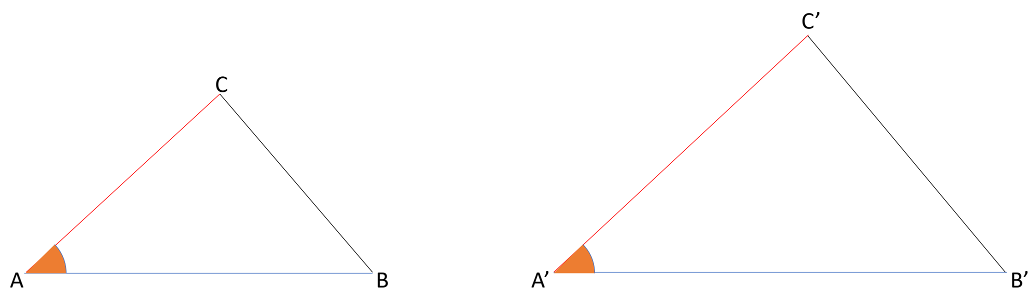
I due triangoli AMN e ABC hanno:
- L'angolo $\hat{A}$ in comune
- $A\hat{M}N \cong A\hat{B}C$



Secondo criterio di similitudine

Enunciato: Se due triangoli hanno due **lati proporzionali** e **l'angolo compreso congruente** allora sono simili

IPOTESI: $A'B' : AB = A'C' : AC$; $\hat{A} \cong \hat{A}'$ TESI: $ABC \sim A'B'C'$

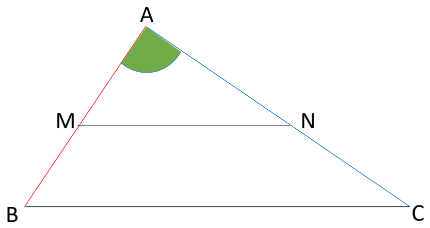


Secondo criterio di similitudine

Applicazione del secondo criterio:

In un triangolo ABC:
- Sia MN una corda parallela a BC
- Con M appartenente ad AB
- Ed N appartenente ad AC

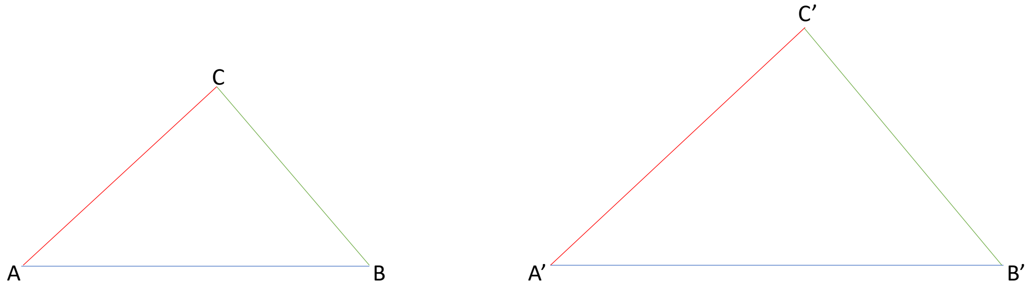
I due triangoli AMN e ABC hanno:
- L'angolo A in comune
- AM : AB = AN : AC



Terzo criterio di similitudine

Enunciato: Se due **triangoli** hanno i **lati proporzionali**, allora sono **simili**

IPOTESI: A'B' : AB = B'C' : BC = A'C' : AC TESI: ABC ~ A'B'C'

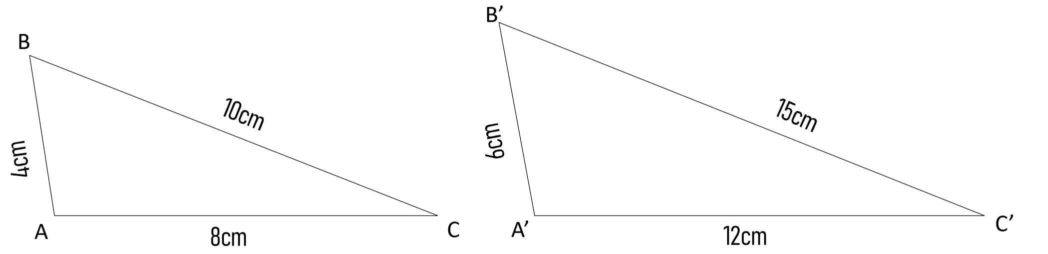


Terzo criterio di similitudine

Applicazione del terzo criterio:

Dati:
- AB = 4cm A'B' = 6cm
- AC = 8cm A'C' = 12cm
- BC = 10cm B'C' = 15cm

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ $\frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ $\frac{15}{10} = \frac{3}{2}$

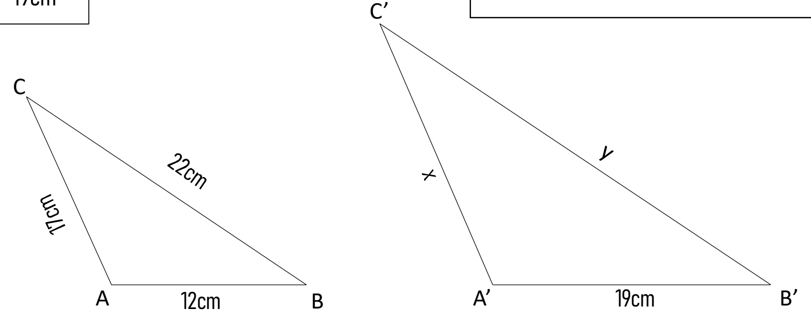


Criteri di similitudine

Esercizio:

Dati:
- AB = 12cm
- AC = 17cm
- BC = 22cm
- A'B' = 19cm

Incognita:
Trovo il valore di:
1. B'C' = y
2. A'C' = x



Criteri di similitudine

Calcolo:

$K = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ $\quad K = \frac{19}{12}$ $\quad \frac{19}{12} = \frac{x}{17}$ $\; x \approx 27cm$ $\quad \frac{19}{12} = \frac{y}{22}$ $\; y \approx 35cm$

$x = A'C' \approx 27cm$ $\quad y = B'C' \approx 35cm$