

ESERCIZI DA SVOLGERE A CASA

Gli studenti con "Piano Didattico Personalizzato" sono dispensati dallo svolgimento degli esercizi 2 e 4, sebbene il loro svolgimento faciliti l'acquisizione di migliori abilità sugli argomenti affrontati nella lezione.

Risolvere le seguenti **DISEQUAZIONI IRRAZIONALI**. Si abbia cura di verificare i risultati.

1. $\sqrt{5x-4} < x$ **SOLUZ.:** $\frac{4}{5} \leq x < 1 \vee x > 4$

Quando la disequazione presenta la forma $\sqrt[n]{A(x)} < B(x)$ con n pari, essa si risolve ponendo

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^n \end{cases}, \text{ ovvero } \begin{cases} 5x-4 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ 5x-4 < x^2 \end{cases}, \begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ x \geq 0 \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases}, \begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ x \geq 0 \\ x < 1 \vee x > 4 \end{cases}.$$

Dopo aver fatto il grafico delle linee, troverai la soluzione che è $\frac{4}{5} \leq x < 1 \vee x > 4$.

2. $\sqrt{x+5} \leq 1-x$ **SOLUZ.:** $-5 \leq x \leq -1$

3. $\sqrt{x+17} > 13-x$ **SOLUZ.:** $x > 8$

Quando la disequazione presenta la forma $\sqrt[n]{A(x)} > B(x)$ con n pari, essa si risolve ponendo

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} A(x) \geq [B(x)]^n \\ B(x) \geq 0 \end{cases}. \text{ Risolviamo separatamente i 2 sistemi per poi calcolare l'unione delle soluzioni.}$$

Sistema-1 $\begin{cases} x+17 \geq 0 \\ 13-x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -17 \\ x > 13 \end{cases}$

Dopo aver fatto il grafico delle linee, troverai la soluzione che è $x > 13$.

Sistema-2 $\begin{cases} x+17 \geq (13-x)^2 \\ 13-x \geq 0 \end{cases}$. Risolviamo la prima disequazione $x+17 \geq 169+x^2-26x$, $x^2-27x+152 \leq 0$

L'equazione associata è: $x^2-27x+152=0$, la cui soluzione è $x_1=8 \vee x_2=19$. Pertanto, la soluzione della disequazione è $8 < x < 19$. Quindi il sistema sarà:

$$\begin{cases} 8 < x < 19 \\ x \leq 13 \end{cases}. \text{ Dopo aver fatto il grafico delle linee, troverai la soluzione che è: } 8 < x \leq 13.$$

Facendo l'unione delle soluzioni, si avrà $x > 8$

4. $\sqrt[3]{x^3-8} - x + 2 \geq 0$ **SOLUZ.:** $x \leq 0 \vee x \geq 2$

5. $4x-8 < \sqrt{x^2-9x+14}$ **SOLUZ.:** $x < 2$

6. $\sqrt[3]{x^3-3x^2} - x + 1 \geq 0$ **SOLUZ.:** $x \leq \frac{1}{3}$

$$7. \quad \sqrt[3]{x^3 - 6x^2} > x - 2$$

SOLUZ.: $x < \frac{8}{12}$

$$8. \quad \sqrt{3x-1} - \sqrt{3-x} < \sqrt{x}$$

SOLUZ.:

Le condizioni di esistenza sono:

$$\begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq \frac{1}{3} \\ x \leq 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq 3$$

Per evitare che negli elevamenti al quadrato si introducano soluzioni estranee, riscriviamo la disequazioni in modo da assicurare la positività di entrambe i membri.

$$\sqrt{3x-1} < \sqrt{x} + \sqrt{3-x} \quad \text{elevando ambo i membri al quadrato si ha:}$$

$$3x-1 < x+3-x+2\sqrt{x(3-x)}$$

$$3x-4 < 2\sqrt{x(3-x)}$$

$$2\sqrt{3x-x^2} > 3x-4$$

Quest'ultima disequazione è del secondo tipo. Essa si risolve considerando i 2 seguenti sistemi

$$\begin{cases} 3x-x^2 \geq 0 \\ 3x-4 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x-4 \geq 0 \\ 4(3x-x^2) > (3x-4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-3x \leq 0 \\ x < \frac{4}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq \frac{4}{3} \\ 12x-4x^2 > 9x^2+16-24x \end{cases}$$

Per concludere l'esercizio occorre:

- 1) Risolvere ciascuno dei 2 sistemi
- 2) Fare l'unione delle soluzioni
- 3) Mettere a sistema quanto ottenuto con le condizioni di realtà.

Il seguente documento si riferisce alle lezioni del prof. Mario Antonuzzi, tratte dal seguente sito:

<https://www.matematichiamo.it/>

Iscriviti anche tu al CANALE e impariamo insieme la matematica!