ESERCIZI da SVOLGERE a CASA

ESERCIZIO 1

Studiare la seguente funzione. Lo studio della funzione si articola in in 7 punti essenziali (da evidenziare in giallo). Controllarli attentamente. Conviene controllare la soluzione solo dopo che si è svolto l'esercizio.

$$y=\frac{1+3x^4}{x^3}$$

1 - STUDIO del DOMINIO

Trattandosi di una funzione fratta, essa è definita quando il $\mathrm{DEN}\neq 0$. Pertanto, la funzione risulta definita quando $4x^3\neq 0 \qquad x\neq 0$.

2 - STUDIO delle SIMMETRIE

Occorre verificare se la funzione è PARI, se è DISPARI o né PARI, né DISPARI. Iniziamo calcolando $f(-x)$.

$$f(-x)=\frac{1+3(-x)^4}{(-x)^3}=\frac{1+3x^4}{-x^3}=-\frac{1+3x^4}{x^3}$$

Inoltre poiché $f(-x)=-f(x)$ allora la funzione è DISPARI. Quindi la funzione è simmetrica rispetto all'Origine degli assi cartesiani. Questo ci consente di studiare la funzione quando $x>0$ (nel semipiano delle ascisse positive). L'andamento della funzione nel semipiano delle ascisse negative può essere dedotto per simmetria.

3 - STUDIO delle INTERSEZIONI con gli ASSI

Occorre calcolare le intersezioni con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate.

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y=\dfrac{1+3x^4}{x^3} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=\dfrac{1+3x^4}{x^3} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=3x^4+1 \\ y=0 \end{cases}$$

Da cui $3x^4+1=0 \qquad 3x^4=-1 \qquad x^4=-\frac{1}{4}$. Ma poiché nessun numero elevato alla quarta può dare un risultato positivo, non esistono soluzioni in campo reale. Quindi la funzione non interseca l'asse delle ascisse.

Intersezione con l'asse delle ordinate

Essendo la funzione definita per $x\neq 0$, essa non interseca l'asse delle y.

4 - STUDIO del SEGNO

Occorre risolvere la seguente disequazione: $\dfrac{1+3x^4}{x^3}>0$

$$N_1>0 \qquad \text{per } 1+3x^4>0 \qquad x^4>-\frac{1}{3} \qquad \forall x\in\Re$$

$$D>0 \qquad \text{per } x^3>0 \qquad x>0$$

Studiando il Grafico dei segni si evince che la funzione è positiva, cioè giace nel semipiano delle ordinate positive per $x>0$. Mentre altrove la funzione è negativa.

5 – STUDIO dei LIMITI

Occorre studiare i limiti agli estremi del dominio. In particolare sono da studiare:

a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x^4}{x^3} = \frac{1+3\cdot 0}{0^3} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

Quindi l'asse delle y è un **asintoto VERTICALE** per la funzione.

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+3x^4}{x^3} = \frac{1+\infty}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forma di Indecisione} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}+3\right)}{x^3} = \frac{+\infty\left(\frac{1}{+\infty}+3\right)}{1} = \frac{+\infty(0+3)}{2} = +\infty$

Quindi sul suo versante di destra, la funzione ha un asintoto orizzontale. Occorre verificare se esse presenti un asintoto obliquo. Per questo motivo, occorre calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+3x^4}{x^4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forma di Indecisione} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^4\left(\frac{1}{x^4}+3\right)}{x^4} = \frac{1\cdot(0+3)}{1} = 3$$

Quindi la funzione ha un **asintoto OBLIQUO** di equazione $y = 3x + q$. Per trovare il valore di q occorre calcolare:

$$q = \lim_{x\to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+3x^4}{x^3} - 3x \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1+3x^4-3x^4}{x^3} \right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0$$

Quindi l'asintoto obliquo destro ha equazione $y = 3x$.

Il fatto che la funzione sia DISPARI comporta la simmetria rispetto all'Origine degli assi cartesiani. Questo fa dedurre 2 limiti che possono essere sintetizzati senza effettuare calcoli:

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+3x^4}{x^3} = -\infty$.

d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{1+3x^4}{x^3} = -\infty$ e la presenza dell'asintoto obliquo di equazione $y = 3x$ anche sul versante sinistro della funzione.

6 – STUDIO delle DERIVATE PRIME

Studiare per quali valori la funzione è crescente e per quali valori è decrescente.

$$y' = \frac{12x^3\cdot x^3 - 3x^2\left(1+3x^4\right)}{x^6} = \frac{12x^6 - 3x^2 - 9x^6}{x^6} = \frac{3x^6 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^4-3}{x^4}$$

La funzione è crescente quando $\frac{3x^4-3}{x^4} > 0$. Essendo il denominatore sempre positivo, sarà:

$$3x^4 - 3 > 0 \qquad x^4 - 1 > 0 \qquad \left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right) > 0 \qquad x^2 - 1 > 0 \qquad \text{per} \quad x \le -1 \lor x \ge 1 \qquad .$$

Cioè la funzione è **crescente** in $x < -1 \lor x > 1$; **decrescente** in $-1 < x < 1$. Insomma ha un andamento di questo tipo:

$\nearrow -1 \searrow 1 \nearrow$

Pertanto si avrà:

un punto di **MASSIMO relativo** in $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1+3\cdot(-1)^4}{(-1)^3} = \frac{1+3}{-1} = -4 \end{cases}$, cioè in $A(-1;-4)$

un punto di **MINIMO relativo** in $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1+3\cdot(1)^4}{(1)^3} = \frac{1+3}{1} = 4 \end{cases}$, cioè in $B(1;4)$

7- STUDIO delle DERIVATE SECONDE

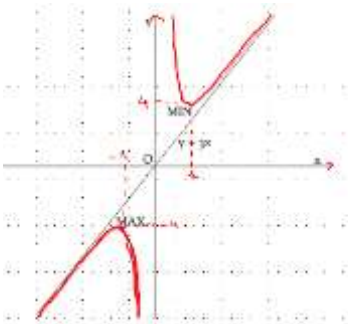
Occorre studiare per quali valori la funzione è CONVESSA (cioè ha la concavità rivolta verso l'alto) e CONCAVA (cioè ha la concavità rivolta verso il basso), individuando anche eventuali punti di FLESSO.

$$y''=\frac{3x^4-3}{x^4}=\frac{12x^3\cdot x^4-4x^3\cdot\left(3x^4-3\right)}{x^8}=\frac{12x^7-12x^7+12x^3}{x^8}=\frac{12x^3}{x^8}=\frac{12}{x^5}$$

La funzione è convessa quando $\frac{12}{x^5}>0$, cioè per $x>0$.

Cioè la funzione è **convessa** per $x>0$; **concava** per $x<0$. Insomma ha un andamento di questo tipo: $\cap \quad 0 \quad \cup$.
Essendo in $x=0$ non definita, essa non ha punti di flesso.

Il suo grafico è il seguente:



Il seguente documento si riferisce alle lezioni del prof. Mario Antonuzzi, tratte dal seguente sito:
https://www.matematichiamo.it/

Iscriviti anche tu al CANALE e impariamo insieme la matematica!