ESERCIZI SVOLTI IN CLASSE

ESERCIZIO 1

Studiare la seguente funzione: $y=\dfrac{x^4-4}{x^3}$

STUDIO del DOMINIO

Trattandosi di una funzione fratta, essa è definita quando il $\mathrm{DEN}\neq 0$. Pertanto, la funzione risulta definita quando $x^3\neq 0 \qquad x\neq 0$.

STUDIO delle SIMMETRIE

Occorre verificare se la funzione è PARI, se è DISPARI o né PARI, né DISPARI. Iniziamo calcolando $f(-x)$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^4-4}{(-x)^3}=\frac{x^4-4}{-x^3}=-\frac{x^4-4}{x^3}$$

Inoltre poiché $f(-x)=-f(x)$ allora la funzione è DISPARI. Quindi la funzione è simmetrica rispetto all'Origine degli assi cartesiani. Questo ci consente di studiare la funzione quando $x>0$ (nel semipiano delle ascisse positive).

L'andamento della funzione nel semipiano delle ascisse negative può essere dedotto per simmetria.

STUDIO delle INTERSEZIONI con gli ASSI

Occorre calcolare le intersezioni con l'asse delle ascisse e con l'asse delle ordinate.

Intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^4-4}{x^3} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=\dfrac{x^4-4}{x^3} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=x^4-4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^4=4 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt[4]{4} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\pm\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Cioè la funzione interseca l'asse delle x in 2 punti $A\left(-\sqrt{2};0\right) \qquad \mathrm{B}\left(\sqrt{2};0\right)$.

Intersezione con l'asse delle ordinate

La funzione in interseca l'asse delle y poiché la funzione è definita per $x\neq 0$

STUDIO del SEGNO

Occorre risolvere la seguente disequazione: $\dfrac{x^4-4}{x^3}>0 \qquad \dfrac{\left(x^2-2\right)\left(x^2+2\right)}{x^3}>0$

$N_1>0 \qquad \text{per } x^2-2>0$.

Scrivo l'equazione associata $x^2-2=0$ che è unn'equazione pura, risolta per $x_1=-\sqrt{2}\vee x_2=\sqrt{2}$. Quindi la disequazione è verifacata per $x<-\sqrt{2}\vee x>\sqrt{2}$

$N_2>0 \qquad \text{per } x^2+2>0$.

Scrivo l'equazione associata $x^2+2=0$ che è unn'equazione pura impossibile. Quindi la disequazione è verificata per $\forall x\in\Re$

$D > 0 \quad \text{per } x^3 > 0 \quad x > 0$

Studiando il Grafico dei segni si evince che la funzione è positiva, cioè giace nel semipiano delle ordinate positive per $-\sqrt{2} < x < 0 \vee x > \sqrt{2}$. Mentre altrove la funzione è negativa.

STUDIO dei LIMITI

Occorre studiare i limiti agli estremi del dominio. In particolare sono da studiare:

a)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 - 4}{x^3} = \frac{0^4 - 4}{0^3} = \frac{0 - 4}{0} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Quindi l'asse delle y è un **asintoto VERTICALE** per la funzione.

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4}{x^3} = \frac{+\infty - 4}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forma di Indecisione} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{4}{x^4}\right)}{x^3} = \frac{+\infty\left(1 - \frac{4}{+\infty}\right)}{1} = \frac{+\infty(1+0)}{1} = +\infty$$

Quindi sul suo versante di destra, la funzione NON ha un asintoto orizzontale. Occorre verificare se essa presenti un asintoto obliquo. Per questo motivo, occorre calcolare:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 - 4}{x^4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Forma di Indecisione} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4\left(1 - \frac{4}{x^4}\right)}{x^4} = \frac{1 \cdot (1 - 0)}{1} = 1$$

Quindi la funzione ha un **asintoto OBLIQUO** di equazione $y = x + q$. Per trovare il valore di q occorre calcolare:

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4 - 4}{x^3} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4 - 4 - x^4}{x^3} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-4}{x^3} \right) = 0$$

Quindi l'asintoto obliquo destro ha equazione $y = x$. Si tratta della bisettrice del PRIMO e TERZO quadrante.

Il fatto che la funzione sia DISPARI comporta la simmetria rispetto all'Origine degli assi cartesiani. Questo fa dedurre 2 limiti che possono essere sintetizzati senza effettuare calcoli:

c) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^4 - 4}{x^4} = -\infty$.

d) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 4}{x^4} = -\infty$ e la presenza dell'asintoto obliquo di equazione $y = x$ anche sul versante sinistro della funzione.

STUDIO delle DERIVATE PRIME

Studiare per quali valori la funzione è crescente e per quali valori è decrescente.

$$y' = \frac{4x^3 \cdot x^3 - 3x^2\left(x^4 - 1\right)}{x^6} = \frac{4x^6 - 3x^6 + 3x^2}{x^6} = \frac{x^6 + 3x^2}{x^6} = \frac{x^4 + 3}{x^4}$$

La funzione è crescente quando $y' = \frac{x^4 + 3}{x^4} > 0$. Essendo sia il numeratore che il denominatore positivi nel dominio della funzione, la funzione è sempre crescente nel suo dominio.

Pertanto essa non ammette né minimi, né massimi relativi.

STUDIO delle DERIVATE SECONDE

Occorre studiare per quali valori la funzione è CONVESSA (cioè ha la concavità rivolta verso l'alto) e per quali valori è CONCAVA (cioè ha la concavità rivolta verso il basso), individuando anche eventuali punti di FLESSO.

$$y'' = \frac{4x^3 \cdot x^4 - 4x^3 \cdot \left(x^4 + 3\right)}{x^8} = \frac{4x^7 - 4x^7 - 12x^3}{x^8} = -\frac{12}{x^5}$$

La funzione è convessa quando $-\frac{12}{x^5} > 0$, cioè per $x < 0$.

Cioè la funzione è **convessa** per $x < 0$; **concava** per $x > 0$. Insomma ha un andamento di questo tipo: $\bigcup \quad 0 \quad \bigcap$. Essendo in $x = 0$ non definita, essa NON ha punti di flesso.
