APPUNTI

Video 5403

Sia data la funzione $z = \frac{4}{x^2 + y^2 + 1}$ questa funzione alla coppia $(1;5)$ fa corrispondere $\frac{4}{27}$. Insomma il dominio è fatto da RxR (potendo la funzione assumere tutti i valori della x e della y), mentre il codiminio è R. Come si può disegnare questa funzione tenendo conto che è in 3 dimensioni?

Per capire meglio la funzione si introducono le linee di livello. Si seziona la funzione mediante dei piani orizzontali che avranno equazione z=k. Consideriamo il piano di equazione z=6, intersechiamolo con la funzione. Otteniamo una figura che proiettata sul piano xOy avrebbe equazione f(x)=6. Potrei disegnare su un piano cartesiano xOy una serie di linee in corrispondenza dei diversi valori assunti da k.

Si può dare la seguente definzione: la **linea di livello** è la proiezione ortogonale sul piano xOy dei punti della funzione calcolati con quota z=k.

Ragionando su un *cono rovesciato* con il vertice sul piano xOy, le sue linee di livello sarebbero delle circonferenze concentriche con il loro centro nel vertice del cono. Per trovare il centro si potrebbe intersecare il cono con il piano xOy che ha equazione z=0.

Esercizio. Sia data la funzione di equazione $z = x^2 + y^2 - 2x + 4y$ voglio rappresentare le sue linee di livello. Esse hanno centro C(1;-2) e $raggio = \sqrt{5+k}$. Si tratta cioè di circonferenze concentriche che esistono per $k \geq -5$. Quindi la funzione non esiste al di sotto del piano di equazione k=-5.

Esercizio. Sia data la funzione di equazione $z = 2x^2 - y + 4$ voglio rappresentare le sue linee di livello. Esse sono del tipo $y = 2x^2 + 4 - k$. Al variare di k ho una famiglia di parabole con asse di simmetria coincidente con l'asse y e con la concavità rivolta verso l'alto. Non ci sono limitazioni sui possibili valori di k. Esse intersecano l'asse y in 4-k. Le parabole sono identiche a eccezione di una traslazione verticale.

Esercizio. Sia data la funzione di equazione $z = 2x - y + 1$ voglio rappresentare le sue linee di livello. Esse sono del tipo $y = 2x + 1 - k$. Al variare di k ho una famiglia di rette parallele (fascio improprio).

Un esempio di linea di livello sono le linee isobare per descrivere la pressione metereologiche su una mappa geografica.

Video 5404

La lezione di topologia inizia con una definizione.

Si definisce **Intorno Circolare** del punto $P_0(x_0;y_0)$ l'insieme dei punti del piano (x;y) che soddisfano la disequazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$. Questa disequazione mi definisce l'insieme dei punti che sono interni alla circonferenza di equazione $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$. Per testare se la disequazione è soddisfatta dentro o fuori la circonferenza si può assumere come punto di prova il punto $P_0(x_0;y_0)$. La circonferenza non è inclusa nell'introno circolare.

Si definisce **Intorno** del punto $P_0(x_0;y_0)$ ogni sottoinsieme di RxR che contiene almeno un intorno circolare di P_0. In realtà dentro un Intorno ci sono infiniti intorni circolari di P_0. Questo varrebbe anche se l'intorno fosse molto piccolo.

Se prendessi un insieme B e prendessi un punto S interno a B, ma molto vicino al bordo di S, anche per S, relativamente vicino al borso di B, B rappresenta un intorno di S.

Se invece prendessi un punto T appartenente al bordo di B, allora B non sarebbe un intorno per T.

Si dice che $P_0(x_0;y_0)$ sia un **Punto di Accumulazione** per l'insieme I se, comunque fissato un Intorno circolare di P_0, esso contiene infiniti punti di I. Anche se il punto P_0 fosse interno ma vicino al bordo di I esso continuerebbe a essere un punto di accumulazione per I.

Se prendessi un punto S sul bordo di I anche lui sarebbe un Intorno di I perché se prendessi un intorno circolare di S, per quanto piccolo, esso conterrebbe infiniti punti di I. Quindi i punti di accumulazione di I sono i punti interni di I e i punti che stanno sul bordo di I.

Invece se prendessi un punto T esterno a I allora T non sarebbe un punto di accumulazione di I perché sicuramente riuscirei a trovare un intorno circolare di T che non conterrebbe punti di I.

Esempio. Se considerassi l'insieme $I=\{(x;y)\in RxR \mid -1\le x\le 1 \wedge -1\le x\le 1\}$ allora potrei dire che O è un punto di accumulazione per I. Infatti tutti gli Intorni Circolari di O contengono infiniti punti di I.

Esempio. Se considerassi l'insieme $E=\{(x;y)\in RxR \mid -1< x< 1 \wedge -1< x< 1\}$ e il punto $P_0\left(\frac{1}{2};1\right)$ allora potrei dire che $P_0 \notin E$ però P_0 è un punto di accumulazione per E.

Un punto P si dice **interno** ad A se sono soddisfatte 2 condizioni:

1) innanzitutto si $P\in A$
2) se esiste un intorno di P i cui punti sono soltanto punti di A.

I punti appartenenti al bordo di A non sono punti interni ad A.

Un punto P si dice **esterno** ad A se esiste un intorno del punto P che non abbia punti di A. Naturalmente il punto rimarrebbe esterno anche se fosse molto vicino ad A.

Un punto P si dice **di frontiera** per A se ogni intorno di P ha punti che appartengo ad A e punti che non appartengono ad A.

Quindi dato un insieme A un punto P può essere interno ad A, esterno ad A o di frontiera per A.

Un insieme dei punti del piano si dice **aperto** se ogni suo punto è un punto interno.

Un insieme dei punti del piano si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto (ovvero se contiene i suoi punti di frontiera).

Video 5405

Sia data una funzione $\mathrm{f}\colon \mathrm{A}\subseteq\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ e sia $P_0(x_0;y_0)\in A$ un punto di accumulazione del dominio A, allora la funzione f si dice parzialmente derivabili rispetto ad x in un punto $P_0(x_0;y_0)$ se esiste ed è finito il $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}_0)-\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}_0)}{\mathrm{x}-\mathrm{x}_0}$.

In questo caso si parla di **derivata parziale** di f(x;y) rispetto alla x nel punto $P_0(x_0;y_0)$. Essa si può indicare con 2 distinte **notazioni**: $f_x(x_0;y_0)$ oppure $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0)$, Quindi calcolare la derivata parziale rispetto alla x, non è altro che la derivata della funzione rispetto ad x, immaginando che y sia una costante.

Da un **punto di vista geometrico** che cosa rappresenta la devata parziale? Immaginiamo di avere la funzione z=f(x;y) e di ragionare nel punto $P_0(x_0;y_0)$. Consideriamo la funzione $z=f(x;y_0)$. Essa è una funzione in una variabile indipendente cioè la x. La derivata parziale $f_x(x_0;y_0)$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto $P_0(x_0;y_0)$ alla funzione $z=f(x;y_0)$.

Esempio 1. Sia data la funzione $f(x,y)=3x+\ln(x-y)+xy^2$. Sicuramente il punto $P_0(2;1)$ appartiene al dominio della funzione. Cosa rappresentano da un punto di vista deometrico le 2 derivate parziali? Quanto valgono?

Il vettore $\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ si chiama **vettore gradiente** e si può indicare anche con la notazione ∇f.

Una funzione può essere derivata più di una volta. Esistono allora le derivate parziali di ordine superiore al primo. In particolare, si indica:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=f_{xx}(x;y)$ una derivata parziale del secondo ordine che si ottiene derivando la funzione per 2 volte rispetto alla variabile x;
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=f_{yy}(x;y)$ una derivata parziale del secondo ordine che si ottiene derivando la funzione per 2 volte rispetto alla variabile y;
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=f_{xy}(x;y)$ una derivata parziale del secondo ordine che si ottiene derivando la funzione prima rispetto alla variabile x e poi rispetto alla variabile y;
4. $\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}(x,y)=f_{yxx}(x;y)$ una derivata parziale del terzo ordine che si ottiene derivando la funzione prima rispetto alla y e poi per 2 volte rispetto alla variabile x;

Nel caso 1) e 2) si parla di **derivate pure**; mentre nel caso 3) e 4) si parla di **derivate miste**.

Esempio 2. Calcolare le derivate parziali del secondo ordine di $f(x,y)=x^4\mathrm{y}-2\mathrm{x}^3\mathrm{y}^2$

Video 5406

Partiamo con alcunui esempi:

Esempio 1. Calcolare le derivate parziali del prime di $f(x,y)=2x^3+5y^2+6xy+7y$

Esempio 2. Calcolare le derivate parziali del primo e del secondo ordine di $f(x,y)=\log\left(3x-y^2\right)+x^3$

Esempio 3. Calcolare le derivate parziali del primo e del secondo ordine di $f(x,y)=e^{x+2y}+5x$

Esempio 4. Si chiarisca il significato geometrico delle derivate parziali prime della funzione $f(x,y)=-x^2+4x-y^2-6y+70$ nel punto $P_0=(2;-3;83)$

Teorema di Schwarz. Sia data una funzione f: $A\subseteq \mathrm{R}^2\rightarrow \mathrm{R}$ che ammetta derivate seconde miste in un intorno di $P_0=(x_0;y_0)$. Supponiamo che f_{xy} e f_{yx} siano 2 funzioni ivi continue. Allora $f_{xy}(P_0)=f_{yx}(P_0)$

E' interessante calcolare l'equazione del **piano tangente** a una funzione $z=f(x,y)$ nel punto $P_0=(x_0;y_0)$. Ebbene l'equazione di tale piano sarà $z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0)$ dove $z_0=f(x_0;y_0)$, $a=f_x(P_0)$ e $b=f_y(P_0)$.

Esempio 5. Scrivere l'equazione del piano tangente alla funzione $f(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{y}$ nel punto $P_0=(4;1)$

Video 5407

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **massimo improprio** se $\forall x \in A$ è $f(x) \leq f(P_0)$. Una funzione può avere anche più punti di massimo improprio.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **massimo proprio** se $\forall x \in A$ è $f(x) < f(P_0)$.

La classica cupola ha un punto di massimo proprio, mentre il tetto di una casa ha infiniti punti di massimo improprio.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **minimo improprio** se $\forall x \in A$ è $f(x) \geq f(P_0)$. Una funzione può avere anche più punti di minimo improprio.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **minimo proprio** se $\forall x \in A$ è $f(x) > f(P_0)$.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **massimo relativo improprio** se $\exists I(P_0; r) \subset A: \ \forall x \in I(P_0; r) \to \ f(x) \leq f(P_0)$.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **massimo relativo proprio** se $\exists I(P_0; r) \subset A: \ \forall x \in I(P_0; r) \to \ f(x) < f(P_0)$.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **minimo relativo improprio** se $\exists I(P_0; r) \subset A: \ \forall x \in I(P_0; r) \to \ f(x) \geq f(P_0)$.

Sia data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia dato un punto $P_0 \in A$, si dice che P_0 è un punto di **minimo relativo proprio** se $\exists I(P_0; r) \subset A: \ \forall x \in I(P_0; r) \to \ f(x) > f(P_0)$.

Di punti di massimo relativo improprio o di minimo relativo improprio ce ne possono essere più di uno.

Teorema di Weierstrass. Sia data una funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia A un insieme chiuso e limitato allora essa ha un Massimo e un Minimo.

Nel caso in cui il dominio della funzione non sia un insieme chiuso e limitato possono verificarsi 4 casi: a) che la funzione abbia un MAX e un min; b) che la funzione abbia un MAX ma non abbia un min; c) che la funzione non abbia un MAX ma abbia un min; d) che la funzione non abbia né un MAX, né un min.

Teorema. Sia data una funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia P_0 un punto interno di A; sia f parzialmente derivabile in P_0; sia P_0 un punto di massimo relativo allora sarà $f_x(P_0) = 0$ e $f_y(P_0) = 0$.

In questo caso il piano tangente alla funzione nel punto P_0 sarà un piano orizzontale. Questo si può dedurre anche dalla equazione del piano tangente. Infatti se l'equazione del piano è $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ sarà sicuramente a=b=0 e pertanto l'equazione del piano sarà $z - z_0 = 0$ cioè $z = z_0$ che è l'equazione di un piano orizzontale.

Avremmo potuto fare gli stessi ragionamenti se P_0 fosse stato un punto di mimimo relativo.

Occorre osservare che la nullità delle derivate parziali è condizione necessaria ma non sufficiente per poter dire che P_0 sia un punto di Massimo relativo (o di minimo relativo). Detto in altri termini, se $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$ questo non implica che il punto P_0 sia un punto di Massimo relativo (o di minimo relativo).

Esempio 1. La funzione $f(x,y)=xy$ nel punto $P_0=(0;0)$ ha entrambe le derivate parziali nulle, però il $P_0=(0;0)$ non è un punto di Massimo e neppure di minimo.

Sia data una funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia P_0 un punto interno di A allora P_0 è definito **punto di sella** se $\exists I(P_0;r)$ all'interno del quale esistono punti P per cui $f(x)>f(P)$ ed esistono punti P per cui $f(x)<f(P)$.

Un punto avente entrambe le derivate parziali nulle e che non sia né un punto di Massimo, né un punto di minimo è un punto di sella. I punti di sella riproducono in 3 dimensioni quello che i punti di flesso a tangente orizzontale riproducevano in 2 dimensioni. Il punto $P_0=(0;0)$ dell'esempio 1 è un punto di sella.

Sia data una funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ e sia P_0 un punto interno di A allora P_0 è definito **punto stazionario** se le derivate parziali sono nulle. Un punto stazionario può essere: a) un punto di Massimo, b) un punto di minimo, c) un punto di sella.

I punti di Massimo e di minimo devono essere ricercati tra: a) i punti stazionari; b) i punti di frontiera.

Video 5408

Sia x_0 un punto stazionario per una funzione f. Per capire se è di massimo, di mimino o di sella ci avvaliamo delle Matrici Hessiana.

Data la funzione $f: A \subseteq R^2 \to R$ la sua matrice Hessiana è $H(x;y)=\begin{bmatrix} f_{xx}(x;y) & f_{xy}(x;y) \\ f_{yx}(x;y) & f_{yy}(x;y) \end{bmatrix}$.

Se $f_{xx}(x_0;y_0)>0$ e $|H(x_0;y_0)|>0$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ è un punto di minimo relativo proprio.

Se $f_{xx}(x_0;y_0)<0$ e $|H(x_0;y_0)|>0$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ è un punto di massimo relativo proprio.

Se $|H(x_0;y_0)|<0$ allora il punto $P_0(x_0;y_0)$ è un punto di sella.

Se $|H(x_0;y_0)|=0$ allora non siamo in grado di capire se il punto $P_0(x_0;y_0)$ è un punto di massimo, di minimo o di sella. Allora per capire di cosa si tratta, vado a calcolare il **segno** di $f(x;y)-f(x_0;y_0)$.

Esercizio. Calcolare i punti di massimo, di mimino o di sella della funzione $f(x;y)=x^4+2x^2y^2+y^4+2x^5-5$ con $(x;y)\in R^2$