T

CAPITOLO

21 FUNZIONI DI DUE VARIABILI

1 Disequazioni in due incognite

Listen to it

A solution of a **linear inequality in two variables** is an ordered pair of values that satisfies the given inequality. The set of solutions of the inequality can be represented as a region on the Cartesian plane.

Disequazioni lineari

▶ Esercizi a p. 1135

Diciamo che una disequazione è *lineare* se è di primo grado.

Ogni disequazione lineare in due incognite può essere ricondotta alla forma

$$ax + by + c > 0, \qquad \text{con } a, b \text{ non entrambi nulli,}$$

o alle altre analoghe con i diversi segni di disuguaglianza.

Le soluzioni di una disequazione in due incognite sono tutte le coppie ordinate di numeri reali che verificano la disuguaglianza. Poiché a ogni coppia corrisponde un punto del piano cartesiano, possiamo studiare queste disequazioni rappresentando l'insieme delle loro soluzioni nel piano cartesiano.

Per una disequazione lineare in due incognite distinguiamo i seguenti casi.

1. $\boldsymbol{a = 0, b \neq 0}$

Nel caso particolare in cui il coefficiente della x è 0 e quello della y è diverso da 0, alla disequazione è associata la retta parallela all'asse x di equazione

$$by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{c}{b} \rightarrow y = q,$$

dove abbiamo posto $-\frac{c}{b} = q$. La disequazione può essere riscritta in una delle seguenti forme:

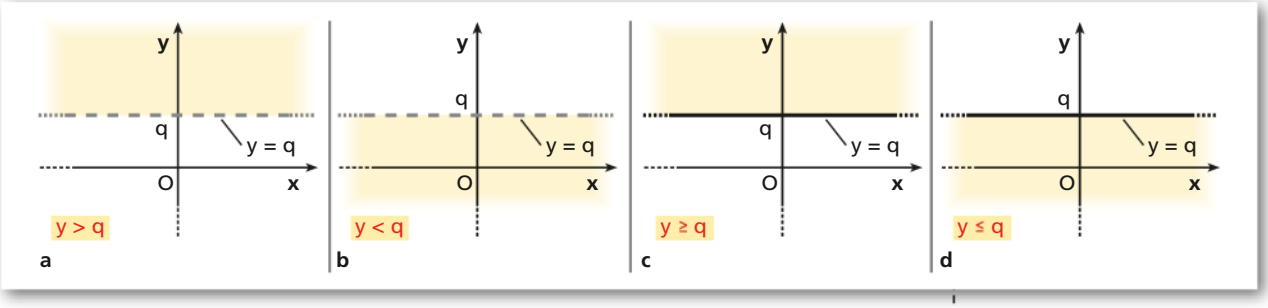
$$y > q; \qquad y < q; \qquad y \geq q; \qquad y \leq q.$$

La retta divide il piano in due semipiani.

La disequazione $y > q$ individua il semipiano i cui punti hanno ordinata maggiore di q (figura **a**), mentre la disequazione $y < q$ individua il semipiano i cui punti hanno ordinata minore di q (figura **b**).

In entrambi i casi i punti della retta non sono soluzioni della disequazione, quindi tratteggiamo la retta.

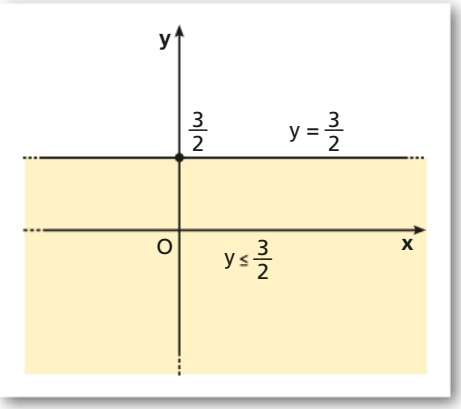
Considerazioni analoghe valgono per $y \geq q$ (figura **c**) e $y \leq q$ (figura **d**), ma in questi casi i punti della retta sono soluzioni della disequazione, quindi utilizziamo una linea continua.



ESEMPIO

$$2y - 3 \leq 0 \rightarrow y \leq \frac{3}{2}$$

Le soluzioni della disequazione sono rappresentate da tutti i punti del semipiano colorato, inclusa la retta origine di equazione $y = \frac{3}{2}$.

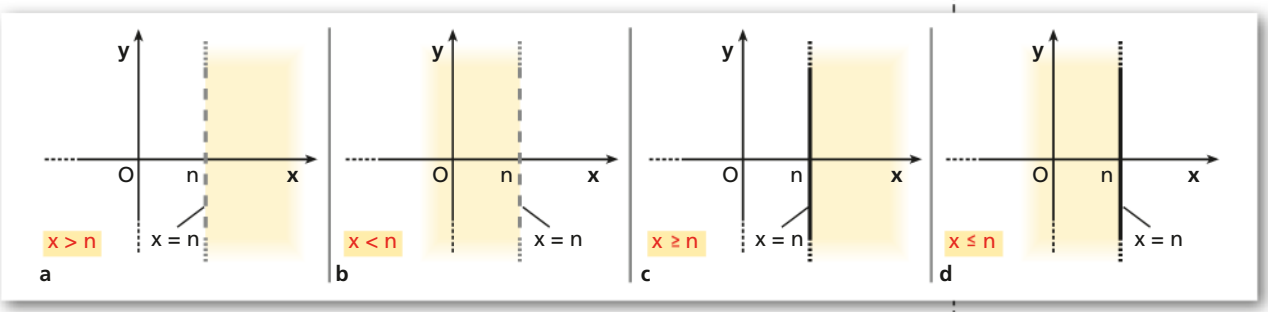


2. $\boldsymbol{a \neq 0, b = 0}$

Alla disequazione è associata la retta parallela all'asse y di equazione:

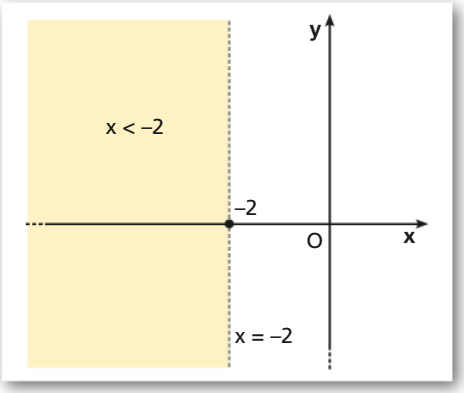
$$ax + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{a} \rightarrow x = n, \qquad \text{con } n = -\frac{c}{a}.$$

Le disequazioni $x > n$ e $x < n$ (figure **a** e **b**) individuano rispettivamente il semipiano i cui punti hanno ascissa maggiore di n e il semipiano dei punti che hanno ascissa minore di n.
Le disequazioni con i segni $\geq$ e $\leq$ individuano gli stessi semipiani, ma compresi i punti della retta origine (figure **c** e **d**).



ESEMPIO

$$-4x - 8 > 0 \rightarrow x < -2$$



Nella figura è rappresentato l'insieme dei punti che hanno ascissa $x < -2$.

3. $\boldsymbol{a \neq 0, b \neq 0}$

Alla disequazione è associata la retta, non parallela agli assi, di equazione:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \rightarrow y = mx + q,$$

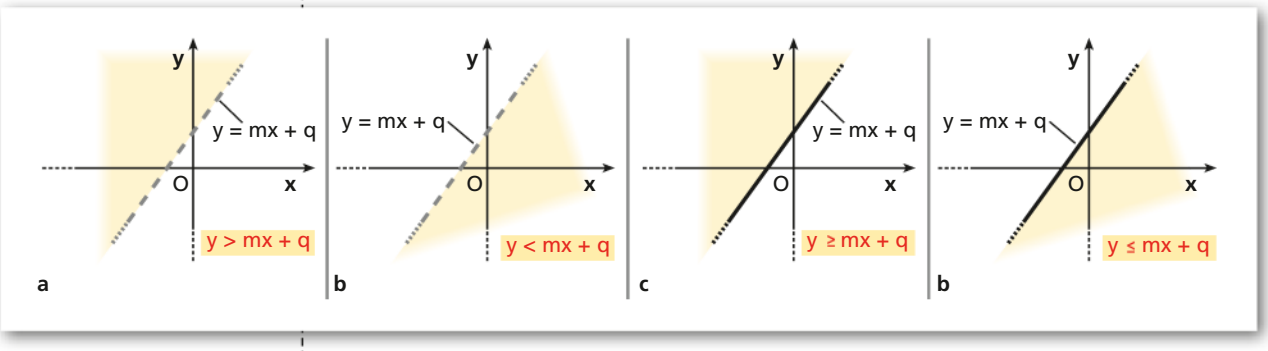
con $m = -\frac{a}{b}$ e $q = -\frac{c}{b}$.

Considerati i semipiani in cui la retta divide il piano, le soluzioni delle disequazioni

$$y > mx + q, \qquad y < mx + q, \qquad y \geq mx + q, \qquad y \leq mx + q$$

sono rappresentate dai punti del semipiano in cui l'ordinata dei punti di ascissa x è rispettivamente:

- maggiore di $mx + q$,
- maggiore o uguale a $mx + q$,
- minore di $mx + q$,
- minore o uguale a $mx + q$.



Se si vuole evitare di esplicitare la disequazione rispetto alla y, per determinare quale dei due semipiani rappresenta l'insieme delle soluzioni, basta disegnare la retta $ax + by + c = 0$ e sostituire nella disequazione le coordinate di un punto che non si trovi su tale retta. Se le coordinate del punto soddisfano la disequazione, il semipiano a cui appartiene il punto è il semipiano cercato. In caso contrario, il semipiano da considerare è quello opposto.
Il punto considerato viene detto **punto di prova**.

Quando la retta non passa per l'origine, ossia se $q \neq 0$, è conveniente utilizzare come punto di prova l'origine O, perché semplifica i calcoli.

ESEMPIO

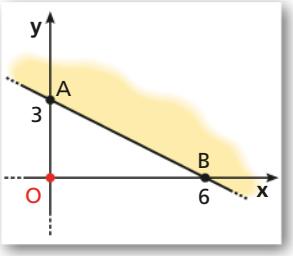
Rappresentiamo nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$x + 2y - 6 \geq 0.$$

Disegniamo la retta di equazione $x + 2y - 6 = 0$.
Scegliamo a caso un punto in uno dei due semipiani individuati dalla retta, per esempio $O(0; 0)$. Le sue coordinate non soddisfano la disequazione perché:

$$0 + 2 \cdot 0 - 6 = -6 < 0.$$

Il semipiano che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione è quindi quello che *non* contiene O, cioè quello che abbiamo colorato.



▶ Risolvi la disequazione $2x + 4 < y + 1$.

Disequazioni non lineari

▶ Esercizi a p. 1136

Anche per le disequazioni non lineari in due incognite si procede come con quelle lineari. Esaminiamo alcuni esempi.

ESEMPIO

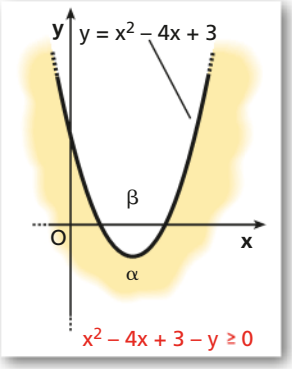
Risolviamo la disequazione $x^2 - 4x + 3 - y \geq 0$.

Esplicitando rispetto a y, otteniamo:

$$y \leq x^2 - 4x + 3.$$

Rappresentiamo la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, che divide il piano in due regioni α e β (figura a fianco). Per i punti di α l'ordinata è minore di quella dei punti della parabola con uguale ascissa, quindi:

$$y < x^2 - 4x + 3.$$



Le soluzioni della disequazione sono quindi rappresentate dai punti della parabola e da quelli della regione di piano α.
Possiamo anche applicare il metodo del punto di prova. Consideriamo $O(0; 0)$. Abbiamo:

$$0^2 - 4 \cdot 0 + 3 - 0 > 0.$$

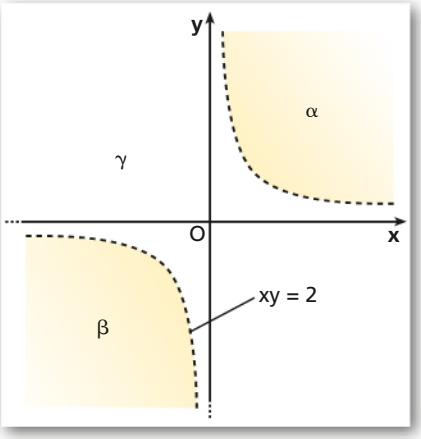
La disequazione è verificata per O che è punto della regione α.

▶ Risolvi la disequazione $y + x^2 \geq 4x + 5$.

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $xy > 2$. Rappresentiamo la curva di equazione $xy = 2$. È un'iperbole equilatera che divide il piano in tre regioni: α, β e γ (figura a fianco). Nella disequazione data dividiamo per x e otteniamo:

- se $x > 0$ $y > \frac{2}{x}$, le cui soluzioni sono rappresentate dai punti di α;
- se $x < 0$ $y < \frac{2}{x}$, con soluzioni rappresentate dai punti di β.



Quindi, le soluzioni della disequazione data sono rappresentate da $\alpha \cup \beta$.

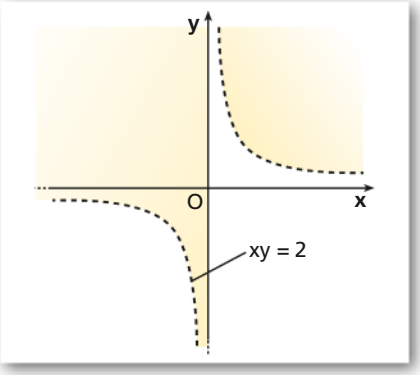
TEORIA

▶ Risolvi la disequazione dell'esempio precedente con il metodo del punto di prova.

In generale, si può dimostrare che per una disequazione analoga a quella dell'esempio le soluzioni sono sempre rappresentate da $\alpha \cup \beta$ oppure da γ.
Quindi, anche in questo caso, si può utilizzare il metodo del punto di prova.
Analizziamo ora la differenza delle soluzioni dell'esempio visto con il seguente.

ESEMPIO
Risolviamo la disequazione $y > \frac{2}{x}$.

Analogamente al caso precedente, rappresentiamo l'iperbole di equazione $xy = 2$. Questa volta la soluzione della disequazione è rappresentata dai punti che hanno ordinata maggiore di quella dei punti dell'iperbole con la stessa ascissa, ossia quelli delle regioni colorate nella figura.



▶ Risolvi la disequazione $\frac{1}{3}y < \frac{1}{x-1}$.

Sistemi di disequazioni

▶ Esercizi a p. 1137

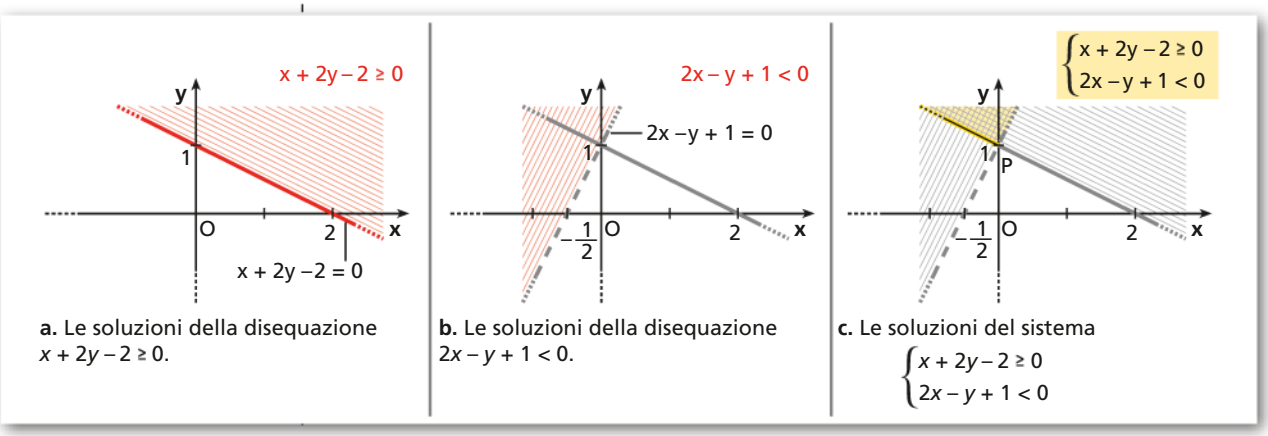
Per rappresentare nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni di un sistema di due o più disequazioni in due incognite, dobbiamo determinare l'**intersezione** fra le parti di piano che rappresentano le soluzioni delle due o più disequazioni di cui è composto il sistema.

ESEMPIO
Rappresentiamo l'insieme delle soluzioni del sistema di due disequazioni in due incognite:

$$\begin{cases} x + 2y - 2 \geq 0 \\ 2x - y + 1 < 0 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo del punto di prova. Disegniamo la retta $x + 2y - 2 = 0$ associata alla prima disequazione. Sostituiamo nella disequazione le coordinate di $O(0; 0)$, che non appartiene alla retta. Essendo $0 + 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$, il semipiano che rappresenta le soluzioni della disequazione è opposto a quello contenente l'origine (figura **a**). Con considerazioni analoghe, determiniamo il semipiano delle soluzioni della seconda disequazione (figura **b**). La parte di piano che rappresenta le soluzioni del sistema si ottiene dall'intersezione dei due semipiani, e in questo caso è un angolo privato della semiretta appartenente alla retta $2x - y + 1 = 0$ e del punto $P(0; 1)$ comune alle due rette (figura **c**).

▶ Risolvi il sistema $\begin{cases} x + y < 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases}$.



a. Le soluzioni della disequazione $x + 2y - 2 \geq 0$.

b. Le soluzioni della disequazione $2x - y + 1 < 0$.

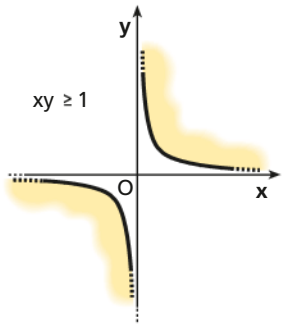
c. Le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + 2y - 2 \geq 0 \\ 2x - y + 1 < 0 \end{cases}$

ESEMPIO

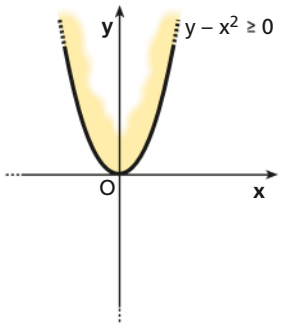
Risolviamo il sistema $\begin{cases} xy \geq 1 \\ y - x^2 \geq 0 \\ -3x + 5y - 14 < 0 \end{cases}$.

Rappresentiamo le curve relative alle singole equazioni dedotte dalle disequazioni del sistema. Dalla prima otteniamo un'iperbole equilatera, dalla seconda una parabola e dalla terza una retta. Con il solito metodo rappresentiamo l'insieme delle soluzioni di ciascuna disequazione (figure **a**, **b**, **c**).
Sovrapponendo le tre soluzioni parziali, determiniamo una parte di piano delimitata dalla figura mistilinea *ABC* (figura **d**), i cui punti hanno coordinate che soddisfano tutte le disequazioni e quindi rappresentano le soluzioni del sistema.

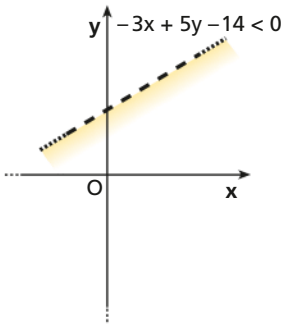
▶ Risolvi il sistema $\begin{cases} y + 2 > 0 \\ y - x^2 + 2x \leq 0 \end{cases}$.



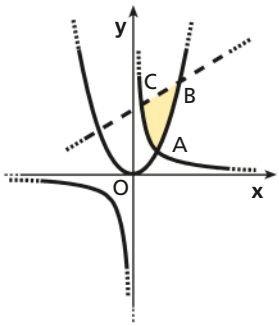
a. Le soluzioni di $xy \geq 1$.



b. Le soluzioni di $y - x^2 \geq 0$.



c. Le soluzioni di $-3x + 5y - 14 < 0$.



d. Le soluzioni del sistema.

2 Coordinate nello spazio

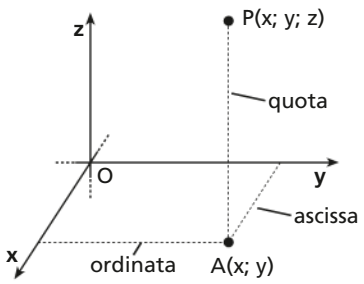
▶ Esercizi a p. 1140

Coordinate cartesiane nello spazio

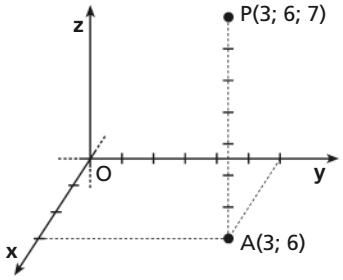
Per rappresentare i punti dello spazio mediante coordinate cartesiane, utilizziamo tre rette a due a due perpendicolari, gli assi x, y e z, che si intersecano in un punto O, detto **origine**.
Orientati gli assi x, y e z come nella figura **a**, nel sistema $Oxyz$ un punto P è individuato da una terna ordinata di numeri reali e si indica con $P(x; y; z)$.
I numeri x, y, z vengono detti rispettivamente **ascissa**, **ordinata** e **quota**. La coppia $(x; y)$ individua il punto A, proiezione di P nel piano Oxy.

Listen to it

In a **three-dimensional Cartesian coordinate system**, any point is specified by three coordinates:
- the *abscissa* (measured along the *x*-axis),
- the *ordinate* (measured along the *y*-axis),
- the *applicate* (measured along the *z*-axis).



a



b. Punto *P* di ascissa 3, ordinata 6 e quota 7.

TEORIA

Piani nello spazio

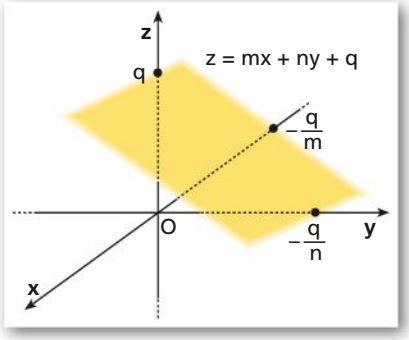
Nel piano un'equazione del tipo $y = mx + q$ (forma esplicita) o $ax + by + c = 0$ (forma implicita) rappresenta una retta.
In modo analogo, nello spazio l'equazione di un piano è un'equazione lineare nelle tre incognite x, y, z:

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \quad \text{forma implicita,}$$

con a, b, c non tutti nulli.

Se $c \neq 0$, possiamo scrivere:

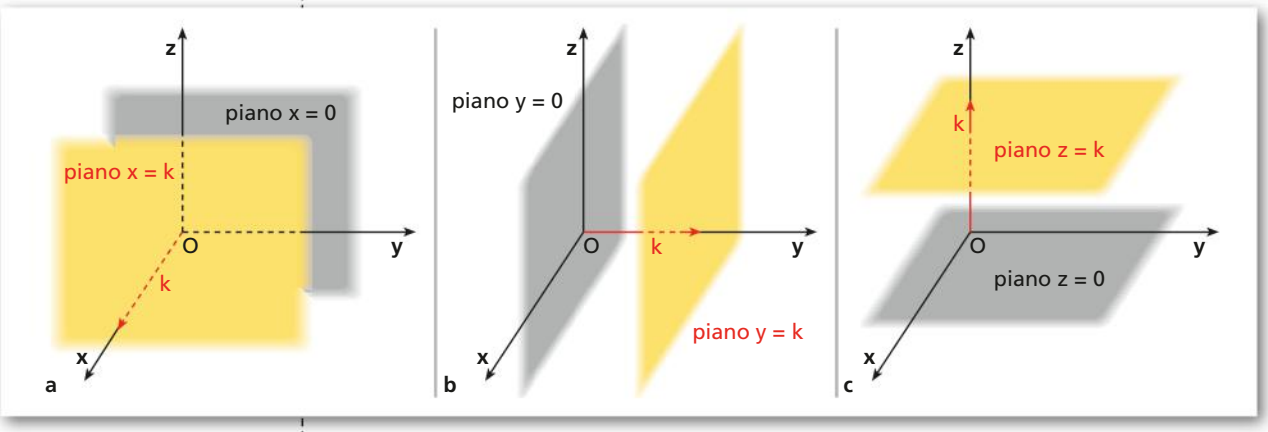
$$\boldsymbol{z = mx + ny + q} \quad \text{forma esplicita.}$$



Come casi particolari abbiamo:

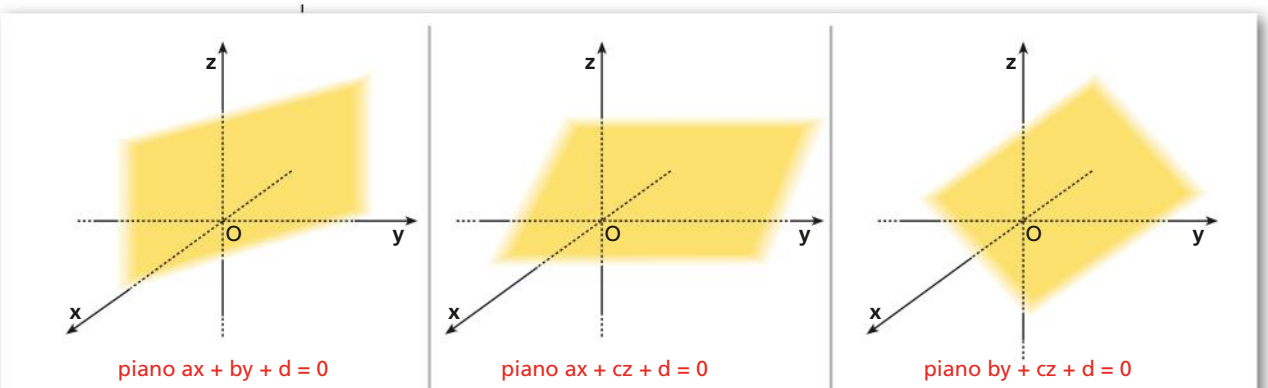
- $x = 0 \rightarrow$ piano Oyz;
- $y = 0 \rightarrow$ piano Oxz;
- $z = 0 \rightarrow$ piano Oxy;
- $x = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oyz;
- $y = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oxz;
- $z = k \rightarrow$ piano parallelo al piano Oxy.

I piani Oyz, Oxz e Oxy vengono anche detti **piani coordinati**.



▶ Disegna il piano di equazione $2x + y - 3 = 0$.

Inoltre, se nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ una sola variabile ha coefficiente 0, il corrispondente piano è parallelo all'asse di tale variabile, e perciò perpendicolare al piano individuato dagli assi delle altre due variabili (figura sotto).



a. $c = 0$: il piano è parallelo all'asse z e perpendicolare al piano Oxy.

b. $b = 0$: il piano è parallelo all'asse y e perpendicolare al piano Oxz.

c. $a = 0$: il piano è parallelo all'asse x e perpendicolare al piano Oyz.

Nel piano, l'equazione di una retta passante per un punto assegnato $P(x_0; y_0)$ è del tipo $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ oppure, se $b \neq 0$, $y-y_0=m(x-x_0)$, con $m=-\frac{a}{b}$. Analogamente, nello spazio, l'equazione di un piano passante per un punto $P(x_0; y_0; z_0)$ è:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

oppure

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0), \qquad \text{con } p=-\frac{a}{c}, q=-\frac{b}{c}, \text{ se } c \neq 0.$$

3 Funzioni di due variabili

In fisica, economia e diverse altre discipline, ci sono molte grandezze che dipendono da più di una variabile. Per esempio:

- il volume occupato da un gas dipende dalla pressione e dalla temperatura;
- lo sconto su un oggetto acquistato dipende dal prezzo e dalla percentuale di sconto applicata.

DEFINIZIONE

Una **funzione reale di due variabili reali** è una relazione che associa a ogni coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$, appartenente a un sottoinsieme S di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uno e un solo numero reale z.
La indichiamo con $z=f(x; y)$, oppure:

$$f: (x; y) \mapsto z, \qquad \text{con } (x; y) \in S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}.$$

ESEMPIO

$z=3x+2xy$ è una funzione di due variabili. x e y sono le variabili indipendenti, z è la variabile dipendente.

Il sottoinsieme S è il **dominio** della funzione e l'insieme dei valori corrispondenti z è il **codominio** della funzione.

Ricerca del dominio

▶ Esercizi a p. 1141

Il **dominio naturale** di una funzione $z=f(x; y)$, detto anche **campo di esistenza**, è l'insieme di *tutte* le coppie $(x; y)$ appartenenti a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ per le quali la funzione è definita. Esso è quindi il più ampio dominio che possiamo scegliere per la funzione. Per brevità lo indicheremo soltanto con **dominio**.

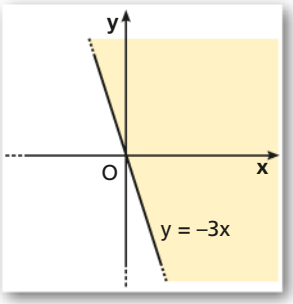
ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione $z=\sqrt{3x+y}+1$.

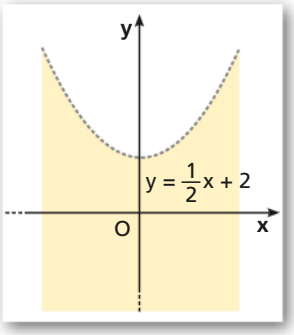
Il dominio è l'insieme delle coppie $(x; y)$ che soddisfano le condizioni di esistenza della radice, cioè l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$3x+y \geq 0 \rightarrow y \geq -3x.$$

Nella figura a fianco è rappresentato il semipiano corrispondente al dominio della funzione.



TEORIA



ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione $z = x + \log(x^2 - 2y + 4)$.

L'argomento del logaritmo deve essere maggiore di 0, poniamo la condizione:

$$x^2 - 2y + 4 > 0 \rightarrow y < \frac{1}{2}x^2 + 2.$$

La curva associata alla disequazione è una parabola. Disegniamo la parabola nel piano Oxy e scegliamo come punto di prova l'origine O.

$$0 < \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \rightarrow 0 < 2.$$

La disequazione è soddisfatta, quindi la parte di piano che rappresenta il dominio è quella che contiene O.

▶ Trova il dominio della funzione $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.

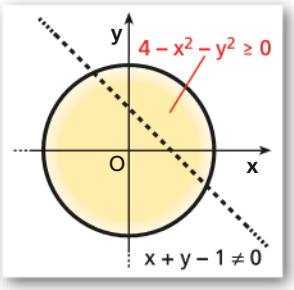
ESEMPIO

Determiniamo il dominio della funzione $z = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x + y - 1}$.

Dobbiamo imporre contemporaneamente due condizioni:

- che il radicando sia positivo o nullo;
- che il denominatore sia diverso da 0.

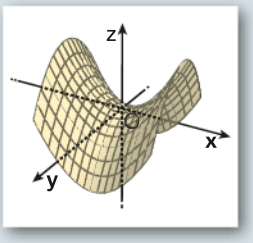
Dobbiamo pertanto risolvere il sistema $\begin{cases} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ x + y - 1 \neq 0 \end{cases}$.



Procediamo graficamente.
Il dominio della funzione è costituito da tutte le coppie di numeri reali che sono le coordinate di punti appartenenti alla parte di piano colorata nella figura a fianco, compresi quelli appartenenti alla circonferenza, ma esclusi i punti appartenenti alla retta $x + y - 1 = 0$.

MATEMATICA AL COMPUTER

Grafici 3D Nel Web sono disponibili programmi che, digitata l'equazione di una funzione di due variabili, forniscono il suo grafico in tre dimensioni. Utilizzane uno per realizzare alcuni grafici. Per esempio, in figura riportiamo quello di $z = x^2 - y^2$.



Cerca nel Web: grafico funzione due variabili online

Grafico di una funzione di due variabili

Nello spazio cartesiano, il **grafico** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x; y; z)$ per cui sussiste la relazione $z = f(x; y)$.
Mentre il dominio di una funzione, essendo costituito da coppie di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, è rappresentabile nel piano Oxy, il grafico di una funzione è in generale una superficie nello spazio e quindi la sua rappresentazione è più complessa.

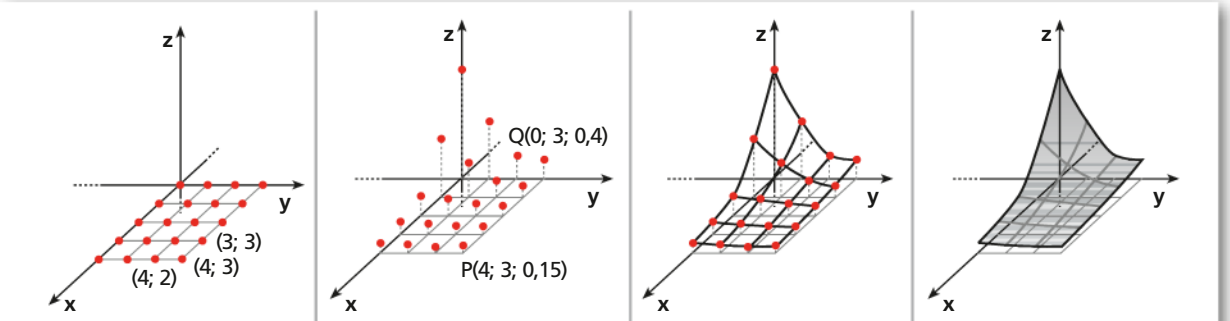
Grafici per punti

Costruire grafici per punti è il metodo usato da un elaboratore elettronico, e si dimostra particolarmente efficace se attuato per un numero molto elevato di punti.

ESEMPIO

Rappresentiamo la funzione $z = \dfrac{4}{x^2 + y^2 + 1}$.

Notiamo che il dominio della funzione è $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in quanto il denominatore della frazione non è mai nullo.
Non potendo rappresentare la funzione in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, studiamo il suo grafico in un dominio più ristretto. Se costruiamo un reticolo sul piano Oxy (per esempio, tracciando rette parallele agli assi x e y per i punti degli assi che hanno coordinate intere e positive) e per ogni punto del reticolo calcoliamo i corrispondenti valori di z, otteniamo la figura seguente.

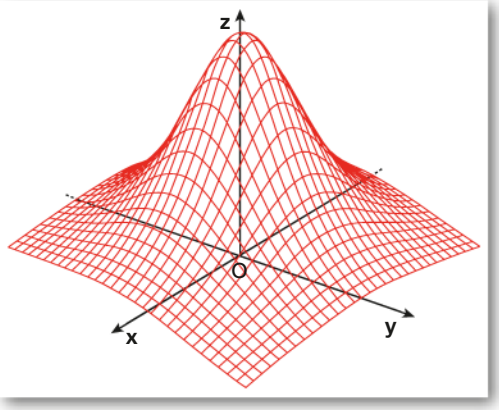


a. Tracciamo i lati di un reticolo nel piano *xy*.

b. Innalziamo le quote da ciascun nodo.

c. Congiungiamo i punti ottenuti con delle linee.

d. Otteniamo la rappresentazione della superficie nello spazio.



Con l'aiuto del computer si ottengono rapidamente grafici per punti basati su un reticolo con un numero molto elevato di nodi, come nella figura a fianco. La rappresentazione è comunque parziale e approssimata, ma riesce a dare un'idea dell'andamento della funzione.

Linee di livello

Un altro modo per rappresentare una superficie è quello delle *linee di livello*.

DEFINIZIONE

Una **linea di livello** è l'insieme delle proiezioni ortogonali sul piano *Oxy* dei punti di una superficie che hanno tutti la stessa quota $z = k$.

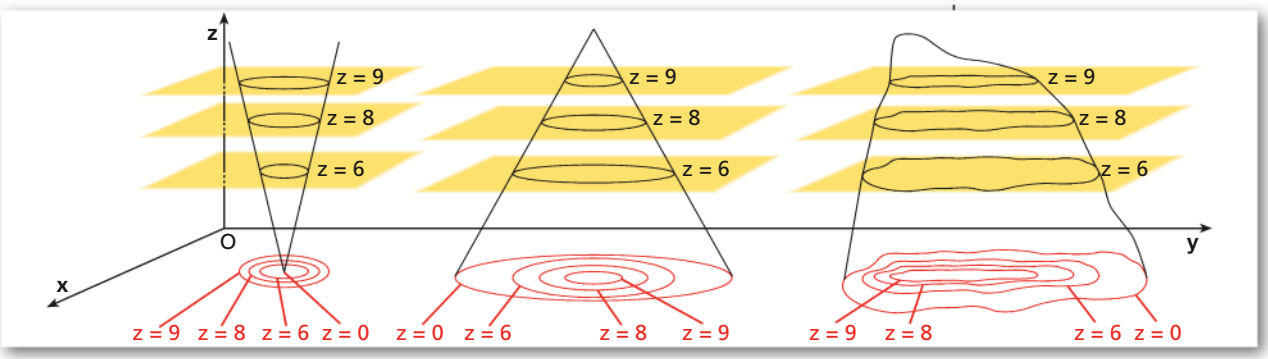
La proiezione ortogonale di un punto P su un piano α è il punto di intersezione fra il piano e la retta passante per P e perpendicolare ad α.

Una linea di livello si ottiene anche proiettando sul piano *Oxy* l'intersezione fra la superficie e un piano parallelo al piano *Oxy*.

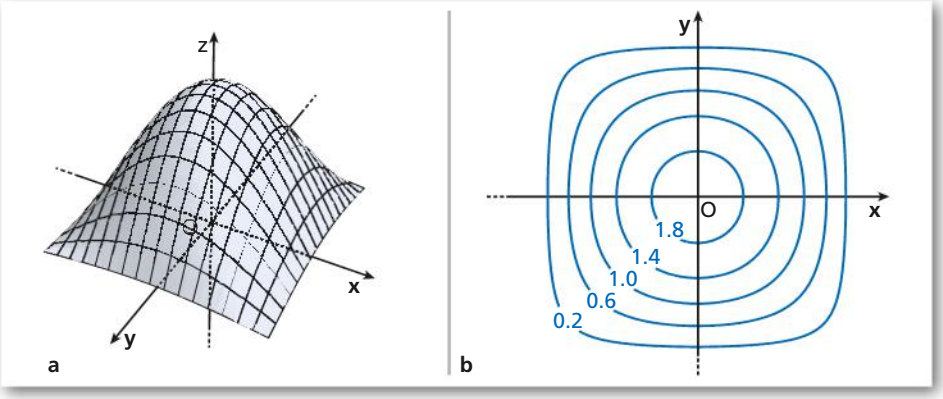
Per farci un'idea dell'andamento di una funzione possiamo considerare le linee di livello associate alla superficie che rappresenta la funzione, assegnando a ogni linea il corrispondente valore della quota del piano secante $z = k$.

Listen to it

Given a function of two variables, we call a **contour line** any *curve* in two dimensions on which the function has a *constant value*.



Nella figura seguente possiamo confrontare una rappresentazione grafica della funzione $z = 2\sin\left(x + \frac{3}{2}\right)\cos y$ (figura **a**) e di alcune sue linee di livello (figura **b**).



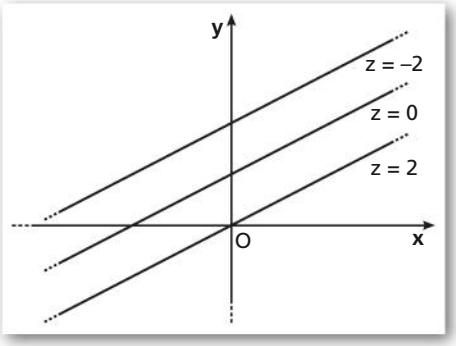
ESEMPIO

Determiniamo le linee di livello della funzione $z = x - 2y + 2$.
Intersechiamo i piani di equazione $z = k$ con il grafico della funzione, che è un piano; l'equazione in x e y che otteniamo per sostituzione è l'equazione delle linee di livello:

$$\begin{cases} z = x - 2y + 2 \\ z = k \end{cases} \rightarrow x - 2y + 2 = k \rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{2-k}{2}.$$

Le linee di livello sono un fascio di rette improprio di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$. Nella figura ne abbiamo disegnate alcune, per k che vale -2, 0 e 2.

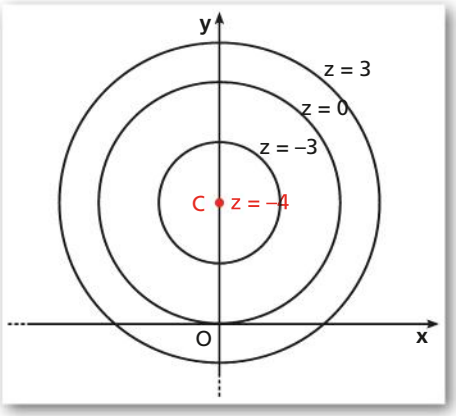


ESEMPIO

Determiniamo le linee di livello di $z = x^2 + y^2 - 4y$.
Intersechiamo il grafico della funzione con i piani di equazione $z = k$:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 - 4y \\ z = k \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = k \rightarrow x^2 + y^2 - 4y - k = 0.$$

Le linee di livello formano un fascio di circonferenze concentriche di centro $C(0; 2)$ e raggio $\sqrt{k+4}$. Dall'espressione del raggio deduciamo che il piano $z = k$ interseca il grafico della funzione per $k \geq -4$, in particolare per $k = -4$ la linea di livello è un punto.

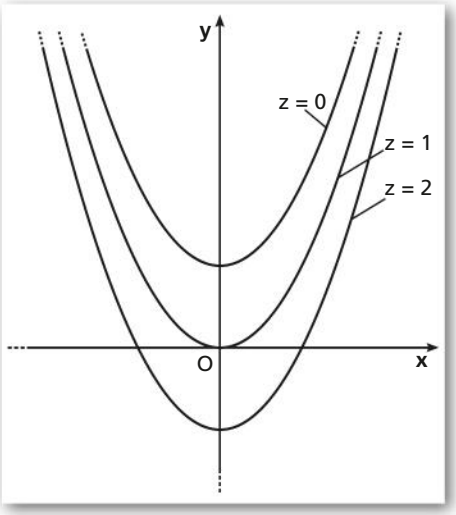


ESEMPIO

Determiniamo le linee di livello della funzione $z = x^2 - y + 1$.
Consideriamo l'intersezione tra i piani di equazione $z = k$ e il grafico della funzione:

$$\begin{cases} z = x^2 - y + 1 \\ z = k \end{cases} \rightarrow x^2 - y + 1 = k \rightarrow y = x^2 + 1 - k.$$

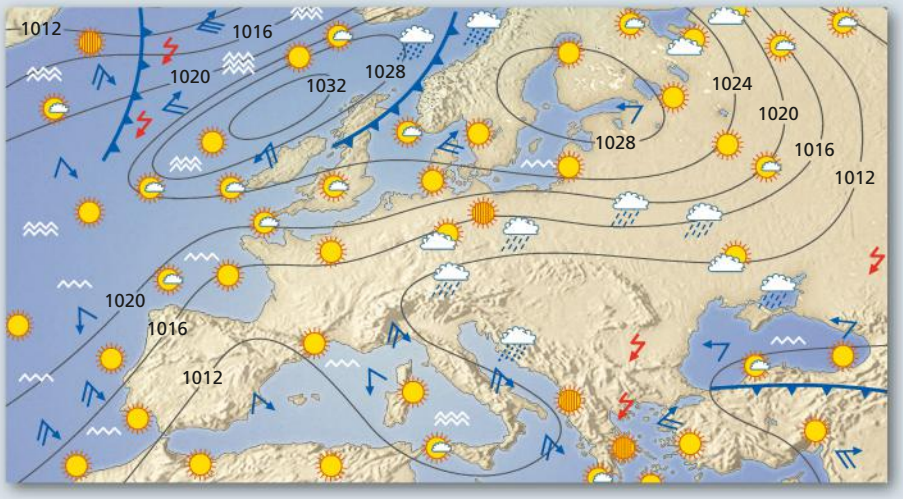
Le linee di livello sono rappresentate da un fascio di parabole congruenti che hanno per asse l'asse y, vertice $V_k(0; 1-k)$ e la concavità rivolta verso l'alto.



► Trova le linee di livello della funzione $z = x^2 + y^2 - 2x$ e rappresentane almeno tre.

MATEMATICA INTORNO A NOI

Mappe meteorologiche Le mappe meteorologiche sono grafici di funzioni in due variabili, con linee di livello. Quelle più utilizzate rappresentano la pressione atmosferica in funzione di latitudine e longitudine. In particolare si evidenziano le linee di punti che hanno tutti la stessa pressione (linee isobare). La collocazione delle isobare è di grande importanza per l'analisi meteorologica. Le differenze di pressione sono infatti alla base della formazione dei venti e dello spostamento delle perturbazioni.



► Quali altre mappe utilizzano linee di livello?

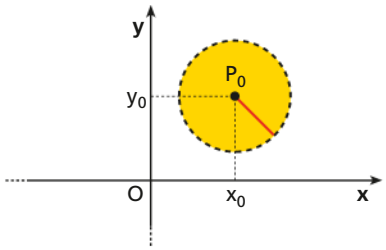
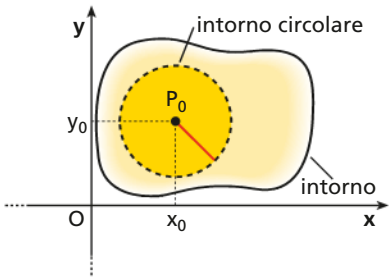
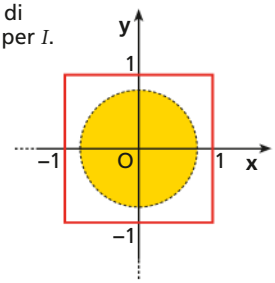
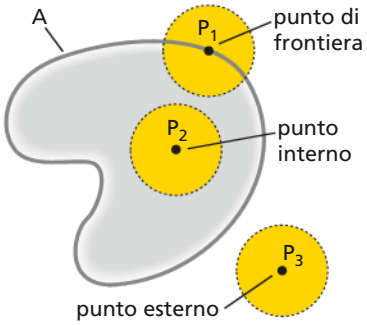
Cerca nel Web: linee livello, altimetria, mappa umidità, mappa numero temporali, temperatura, linee cotidali

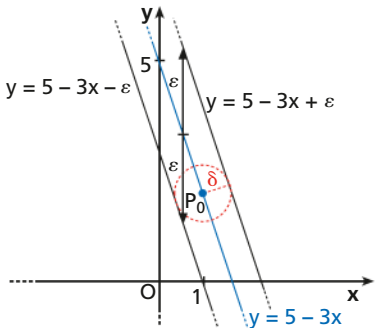
TEORIA

Limiti e continuità

▶ Esercizi a p. 1146

Estendiamo alle funzioni di più variabili i concetti e le definizioni che riguardano le funzioni di una variabile.

Intorni, punti di accumulazione, insiemi aperti e insiemi chiusi	
Definizione	**Esempio**
Si chiama **intorno circolare** di un punto $P_0(x_0; y_0)$ del piano l'insieme dei punti del piano le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano la disequazione $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$, con r numero reale positivo. Il numero r viene detto **raggio** dell'intorno, mentre P_0 viene detto **centro** dell'intorno.	
Si chiama **intorno** di un punto P_0 del piano ogni sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ che contiene un intorno circolare di centro P_0.	
Dato un insieme I di punti di un piano, un **punto** P_0 si dice **di accumulazione** per I se, *comunque fissato* un intorno circolare di P_0, tale intorno contiene infiniti punti di I.	$I = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1\}$ $O(0; 0)$ è punto di accumulazione per I. 
Dato un insieme A di punti del piano, un **punto** P si dice: • **interno** ad A se $P \in A$ e se esiste un intorno di P i cui punti sono soltanto punti di A; • **esterno** ad A se esiste un intorno di P che non ha punti appartenenti ad A; • **di frontiera** per A se *ogni* intorno di P ha per elementi punti che appartengono ad A e punti che non appartengono ad A.	
Un **insieme** di punti del piano si dice: • **aperto** se ogni suo punto è *interno*; • **chiuso** se il suo complementare è aperto, ovvero se l'insieme contiene la sua frontiera.	Un poligono è un insieme di punti chiuso, mentre diventa aperto se lo priviamo dei punti dei suoi lati.

Limiti, continuità	
Definizione	**Esempio**
Data una funzione $z = f(x; y)$, di dominio D, e un punto $P_0(x_0; y_0)$ di accumulazione per D, si dice che la funzione ammette **limite finito l per $P(x; y)$ tendente a $P_0(x_0; y_0)$** e si scrive $\lim\limits_{P \to P_0} f(x; y) = l$ oppure $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = l$ se, fissato arbitrariamente un numero positivo ε, si può determinare un intorno circolare di P_0, di raggio δ dipendente da ε, per ogni punto del quale, escluso P_0, sia $\lvert f(x; y) - l \rvert < \varepsilon$.	$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} (3x + y) = 5$ Infatti, fissato arbitrariamente un numero positivo ε, la relazione $\lvert 3x + y - 5 \rvert < \varepsilon$ è verificata per ogni intorno circolare di P_0 che abbia raggio minore o uguale alla distanza di P_0 da ognuna delle due rette $y = 5 - 3x - \varepsilon$, $y = 5 - 3x + \varepsilon$. 
Una **funzione** $z = f(x; y)$ definita in un insieme D si dice **continua in un punto $P_0(x_0; y_0)$**, appartenente a D e di accumulazione per D stesso, se esiste finito il $\lim\limits_{P \to P_0} f(x; y)$, e se tale limite è uguale al valore assunto dalla funzione in P_0. Scriviamo: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$. Diciamo poi che la **funzione** è **continua in D** se lo è per ogni punto di D.	• Le funzioni polinomiali sono continue in tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. • Le funzioni razionali sono continue nel loro dominio naturale $\left(\text{per esempio } z = \frac{x+y}{x-y} \text{ è continua in tutti i punti di } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tali che } (x \neq y)\right)$.

4 Derivate parziali

Per le funzioni di una variabile lo studio della derivata prima permette di conoscere se la funzione è crescente o decrescente e se ammette massimi e minimi.

Nel caso delle funzioni di due variabili studiamo il loro comportamento attraverso due derivate, dette *derivate parziali*.
Sia $z = f(x; y)$ una funzione con dominio D e $P_0(x_0; y_0)$ un punto interno a D. Consideriamo y costante, cioè $y = y_0$: la funzione $z = f(x; y_0)$ dipende soltanto dalla variabile x, quindi possiamo considerare il rapporto incrementale per un incremento h di un valore x_0 e dare la seguente definizione di derivata.

▶ Calcola i rapporti incrementali parziali della funzione $z = \frac{1}{x} + y$ nel punto $(2; 2)$ relativi agli incrementi $\Delta x = \Delta y = 0,1$.

TEORIA

DEFINIZIONE

Chiamiamo **derivata parziale di *f* rispetto a *x*** nel punto P_0 il limite, se esiste finito, per h che tende a 0 del rapporto incrementale di f nel punto P_0 rispetto a x. In simboli:

$$f'_x(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}.$$

Analogamente, posto $x = x_0$, con x_0 costante, la funzione $z = f(x_0; y)$ dipende solo da y e diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Chiamiamo **derivata parziale di *f* rispetto a *y*** nel punto P_0 il limite, se esiste finito, per k che tende a 0 del rapporto incrementale k di f nel punto P_0 rispetto a y. In simboli:

$$f'_y(x_0; y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + k) - f(x_0; y_0)}{k}.$$

Le derivate parziali si indicano anche con i simboli:

z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, per la derivata rispetto a x,

z'_y, f'_y, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, per la derivata rispetto a y.

Se consideriamo, anziché $P_0(x_0; y_0)$, un punto generico $(x; y)$, i valori $f'_x(x; y)$ e $f'_y(x; y)$ sono funzioni di x e y, e per questo parliamo anche di *funzioni derivate parziali*.
Per il calcolo delle derivate parziali, quando deriviamo rispetto alla variabile x, pensiamo perciò a y come a una costante e, quando deriviamo rispetto alla variabile y, pensiamo a x come a una costante. Valgono quindi tutti i teoremi visti per le funzioni di una variabile.

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate parziali di: $z = x^2 + y^2 + 5x^4y^3 + 6x - 4y + 2$.
Abbiamo:

$$f'_x = 2x + 0 + 20x^3y^3 + 6 - 0 + 0 = 2x + 20x^3y^3 + 6;$$
$$f'_y = 0 + 2y + 15x^4y^2 + 0 - 4 + 0 = 2y + 15x^4y^2 - 4.$$

Nel primo caso abbiamo considerato y^2, y^3 come costanti. Analogamente, abbiamo considerato come costanti le potenze della x quando abbiamo derivato rispetto alla variabile y.

▶ Calcola le derivate parziali delle funzioni

a. $z = \dfrac{x-1}{y}$,

b. $z = x \ln y$.

Se in un punto $(x; y)$ del dominio di una funzione $z = f(x; y)$ esistono le derivate parziali f'_x e f'_y, si dice che la funzione f è **parzialmente derivabile in $(x; y)$**.

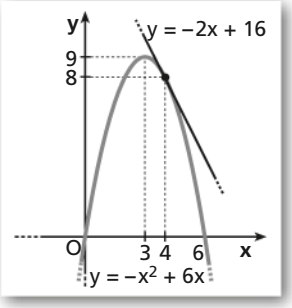
Ricordiamo che, se una funzione di una variabile è derivabile in un punto, allora in tale punto è anche continua.
Questa proprietà non si estende alle funzioni di due variabili. Ci sono infatti funzioni parzialmente derivabili in un punto che **non** sono continue in tale punto. L'esistenza delle derivate parziali non è quindi una condizione sufficiente per la continuità di una funzione di due variabili.

Significato geometrico della derivata parziale

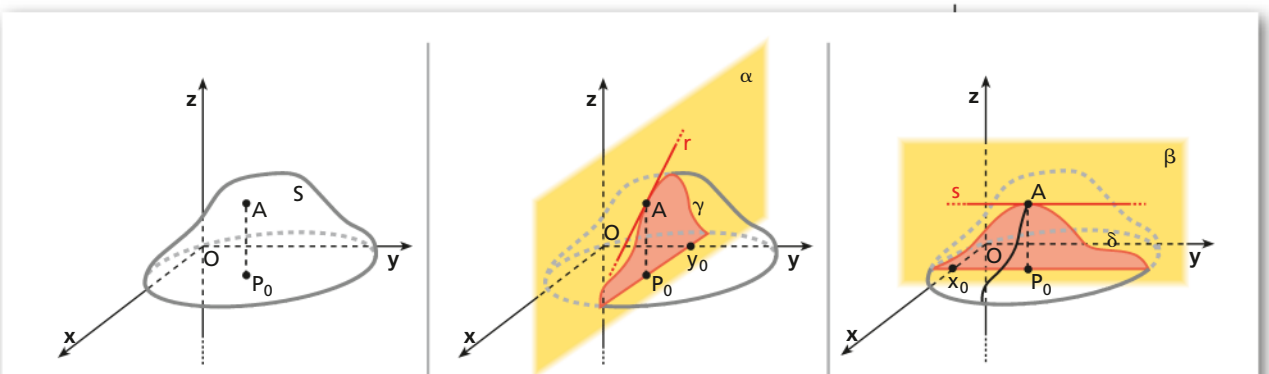
Abbiamo visto, per le funzioni di una sola variabile $y = f(x)$, che il valore della derivata in un punto è uguale al coefficiente angolare della retta tangente in quel punto.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = -x^2 + 6x$ nel suo punto $P(4; 8)$.
La derivata prima è $y' = -2x + 6$, e calcolata in P è $y'(4) = -2 \cdot 4 + 6 = -2$. La retta tangente, utilizzando la formula $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, risulta pertanto: $y - 8 = -2(x - 4) \rightarrow y = -2x + 16$.



In modo analogo possiamo estendere il concetto alle funzioni di due variabili.
Consideriamo la superficie che rappresenta una funzione $z = f(x; y)$, il punto $P_0(x_0; y_0)$ e la sua immagine $A(x_0; y_0; z_0)$, come nella figura sotto.
Se, come abbiamo detto, calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile x significa mantenere costante la variabile y, possiamo pensare di sezionare la superficie con un piano α passante per A e parallelo al piano Oxz.



a. Il punto A della superficie S, che rappresenta la funzione $z = f(x; y)$, ha l'ascissa e l'ordinata uguali a quelle di $P_0(x_0; y_0)$, mentre la sua quota è z_0.

b. L'equazione del piano α è $y = y_0$. La curva γ è l'insieme dei punti di S che hanno ordinata costante y_0.

c. L'equazione del piano β è $x = x_0$. La curva δ è l'insieme dei punti di S che hanno ascissa costante x_0.

La sezione ottenuta è la curva γ (figura **b**). Il coefficiente angolare della retta r tangente a γ in A è $f'_x(x_0; y_0)$.
Analogamente, se calcolare la derivata parziale rispetto alla variabile y significa mantenere costante la variabile x, possiamo pensare di sezionare la superficie con un piano β passante per A e parallelo al piano Oyz. La sezione ottenuta è la curva δ (figura **c**). Il coefficiente angolare della retta s tangente a δ in A è $f'_y(x_0; y_0)$.

Piano tangente a una superficie

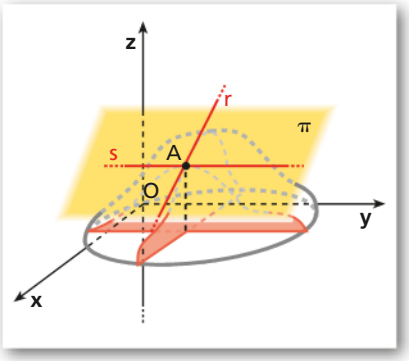
▶ Esercizi a p. 1149

Consideriamo ancora la superficie S rappresentata nella figura che segue. Il piano individuato dalle due rette tangenti r e s viene detto **piano tangente alla superficie** nel punto A.

Vogliamo determinare l'equazione di questo piano.

Consideriamo l'equazione di un generico piano passante per $A(x_0; y_0; z_0)$:

$$z - z_0 = m(x - x_0) + l(y - y_0).$$



Se sezioniamo il generico piano per A con il piano di equazione $y = y_0$, otteniamo la retta di equazione

$$z - z_0 = m(x - x_0);$$

poiché vogliamo che la retta trovata sia tangente alla curva in A, deve essere:

$$m = f'_x(x_0; y_0).$$

Analogamente possiamo dedurre che:

$$l = f'_y(x_0; y_0).$$

Concludiamo che, se il piano tangente esiste, ha equazione

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

ovvero:

$$\boldsymbol{z = f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).}$$

Osserviamo che questa è l'equazione di un piano, in quanto è lineare nelle variabili x, y, z. Inoltre il piano passa per A, perché le sue coordinate soddisfano l'equazione.

ESEMPIO

Determiniamo l'equazione del piano tangente alla superficie $z = 4x^2 + y^2 - 6x$ nel suo punto $A(2; 3; 13)$.

Calcoliamo le derivate parziali della funzione in $P_0(2; 3)$:

$$f'_x = 8x - 6 \rightarrow f'_x(2; 3) = 8 \cdot 2 - 6 = 10;$$
$$f'_y = 2y \rightarrow f'_y(2; 3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

L'equazione del piano tangente è:

$$z = 13 + 10(x - 2) + 6(y - 3) \rightarrow z = 10x + 6y - 25.$$

▶ Determina l'equazione del piano tangente alla superficie $z = x^2 - 2y^2 + y$ nel punto $A(2; 1; 3)$.

Le funzioni di una variabile possono non essere derivabili in un punto e quindi non ammettere la retta tangente in tale punto, come per esempio in un punto angoloso o in una cuspide.

Analogamente, anche le funzioni di due variabili possono avere punti in cui non esiste il piano tangente.

ESEMPIO

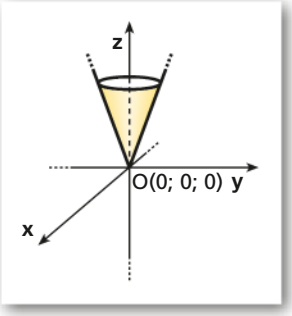
Vogliamo determinare il piano tangente alla superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel suo punto $O(0; 0; 0)$.

Calcoliamo le derivate parziali prime nel suo punto $O(0; 0; 0)$.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(0+\Delta x; 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\Delta x} = \begin{cases} -1 & \text{se } \Delta x \to 0^- \\ 1 & \text{se } \Delta x \to 0^+ \end{cases}$$

Quindi non esiste la derivata parziale rispetto a x. Analogamente si verifica che non esiste la derivata parziale rispetto a y. Non esiste pertanto il piano tangente alla superficie nel suo punto $O(0; 0; 0)$.

La superficie, infatti, è un cono indefinito con vertice proprio in O; esistono infiniti piani che hanno in comune con il cono soltanto il vertice, dunque non esiste il piano tangente al cono nel suo vertice.



Differenziale

▶ Esercizi a p. 1150

Consideriamo una funzione $z = f(x; y)$ definita in un insieme aperto D del piano Oxy e supponiamo che per un punto $P_0(x_0; y_0)$ appartenente a D esistano le derivate parziali prime della funzione. Consideriamo un punto $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ del dominio e calcoliamo l'incremento Δf che la funzione subisce nel passare da P_0 a P.

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

DEFINIZIONE

La funzione f è **differenziabile** nel punto $P_0(x_0; y_0)$ se l'incremento Δf si può scrivere nella forma

$$\Delta f = f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ con } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0.$$

$f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$ è il **differenziale totale** di f nel punto $P_0(x_0; y_0)$ e si indica con df;

$f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x$ è il **differenziale parziale rispetto a x** in $P_0(x_0; y_0)$;

$f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$ è il **differenziale parziale rispetto a y** in $P_0(x_0; y_0)$.

Poiché le derivate parziali in un punto sono numeri, possiamo esplicitare la definizione dicendo che una funzione è differenziabile in un punto se il suo incremento è uguale a una combinazione lineare degli incrementi delle variabili più una quantità che tende a 0 più rapidamente di quanto non faccia l'espressione $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ al tendere a 0 degli incrementi Δx e Δy.

Se consideriamo ora le funzioni $g(x; y) = x$ e $h(x; y) = y$, e i loro differenziali totali

$$dg = dx = 1 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y = \Delta x, \quad dh = dy = 0 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y = \Delta y,$$

vediamo che risulta: $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$.
Gli incrementi Δx e Δy sono pertanto uguali ai differenziali totali delle variabili indipendenti.

Il differenziale totale di una funzione in P_0 è quindi:

$$\boldsymbol{df = f'_x(x_0; y_0) \cdot dx + f'_y(x_0; y_0) \cdot dy.}$$

TEORIA

▶ Calcola il differenziale totale della funzione $z = f(x; y) = x^3 - y^3 + 3xy$ nel generico punto $(x; y)$. Calcola poi il differenziale in $(-2; 1)$ relativo agli incrementi $\Delta x = 0,1$ e $\Delta y = -0,1$.

ESEMPIO

Calcoliamo il differenziale totale della funzione $z = f(x; y) = 5x^2 - y^2 + 2xy$ in un generico punto di coordinate $(x; y)$.
Le derivate parziali prime sono $f'_x = 10x + 2y$, $f'_y = -2y + 2x$, quindi il differenziale totale è:

$$df = (10x + 2y)\,dx + (-2y + 2x)\,dy.$$

Abbiamo visto che, se una funzione in due variabili è derivabile, non è necessariamente continua.

La differenziabilità invece assicura la continuità. Vale infatti il teorema seguente.

TEOREMA
Differenziabilità e continuità
Se una funzione $f(x; y)$ è differenziabile nel punto $P_0(x_0; y_0)$, allora è continua nello stesso punto.

Se una funzione è differenziabile in un punto, esiste sempre il piano tangente al suo grafico in quel punto.
Osserviamo che se una funzione è differenziabile in un punto $P_0(x_0; y_0)$ l'incremento Δf differisce dal differenziale df per un termine che tende a zero se Δx e Δy tendono a zero.
Consideriamo un punto $P(x; y)$ «vicino» a $P_0(x_0; y_0)$, cioè con $x - x_0 = \Delta x$ e $y - y_0 = \Delta y$ vicini a 0. Possiamo approssimare il valore della funzione in P utilizzando il differenziale:

$$f(x;y) \simeq f(x_0;y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0;y_0) \cdot \Delta y.$$

ESEMPIO
Approssimiamo l'espressione $\ln 1,08 + (1,1)^{0,2}$, tenendo conto del valore della funzione $f(x; y) = \ln x + y^{0,2}$ nel punto $P_0(1; 1)$.
L'espressione che vogliamo approssimare è il valore di f nel punto $P(1,08; 1,1)$.
Dato che gli incrementi delle variabili rispetto a $P_0(1; 1)$ sono:

$$\Delta x = 1,08 - 1 = 0,08, \quad \Delta y = 1,1 - 1 = 0,1,$$

possiamo trovare il valore approssimato utilizzando il differenziale.
Le derivate parziali sono:

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{x} \to f'_x(1;1) = 1, \quad f'_y(x; y) = 0,2 \cdot y^{-0,8} \to f'_y(1;1) = 0,2.$$

Il valore della funzione in P_0 è:

$$f(1;1) = \ln(1) + 1^{0,2} = 1.$$

Quindi:

$$f(1,08;1,1) = f(1;1) + f'_x(1;1) \cdot 0,08 + f'_y(1;1) \cdot 0,1 =$$
$$1 + 1 \cdot 0,08 + 0,2 \cdot 0,1 = 1,10.$$

Osserviamo che questo valore coincide con l'arrotondamento alla seconda cifra decimale calcolando l'espresssione con una calcolatrice:

$$\ln 1,08 + (1,1)^{0,2} = 1,096205\ldots$$

Derivate parziali seconde

▶ Esercizi a p. 1151

Sia data una funzione $z = f(x; y)$ dotata di derivate parziali f'_x e f'_y, che chiamiamo **derivate parziali prime**. Se anche queste sono funzioni derivabili, si possono definire le **derivate parziali seconde**, che sono quattro e che indichiamo di seguito con il loro simbolo.

Derivata parziale rispetto a x < della derivata parziale rispetto a x: f''_{xx}; della derivata parziale rispetto a y: f''_{xy}.

Derivata parziale rispetto a y < della derivata parziale rispetto a x: f''_{yx}; della derivata parziale rispetto a y: f''_{yy}.

ESEMPIO

Calcoliamo le derivate parziali prime e seconde della funzione:

$$z = f(x; y) = x^3 - 4xy^2 + 5x^2y - 2y^3.$$

Abbiamo le derivate parziali prime:

$$f'_x = 3x^2 - 4y^2 + 10xy \quad \text{e} \quad f'_y = -8xy + 5x^2 - 6y^2.$$

Da queste otteniamo le quattro derivate parziali seconde:

$$f''_{xx} = 6x + 10y;\ f''_{yx} = -8y + 10x;\ f''_{xy} = -8y + 10x;\ f''_{yy} = -8x - 12y.$$

▶ Calcola le derivate seconde della funzione $z = f(x; y) = x^4 - x^2y + xy^3 - y$.

Le derivate f''_{xy} e f''_{yx} vengono anche dette **derivate miste**.

Osserviamo, nel precedente esempio, che le derivate parziali miste sono uguali. Questo non è un caso fortuito, ma una proprietà formulata da un teorema, del quale omettiamo la dimostrazione.

TEOREMA

Teorema di Schwarz

Se una funzione $z = f(x; y)$ ha derivate seconde miste che siano continue in un insieme aperto I, per ogni punto di tale insieme è:

$$f''_{yx}(x; y) = f''_{xy}(x; y).$$

5 Massimi e minimi

▶ Esercizi a p. 1153

Lo studio di una funzione di due variabili si completa con la ricerca dei massimi e minimi.

Listen to it

Finding the **maxima** and **minima** of a function means finding its largest and smallest values, either within a range or on the entire domain of the function.

DEFINIZIONE

Se $z = f(x; y)$ è una funzione definita in un insieme aperto D, $P_0(x_0; y_0) \in D$ è un punto di massimo relativo per la funzione se per tutti i punti di un intorno di P_0, incluso in D, si verifica: $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$.
Il numero $f(x_0; y_0)$, appartenente al codominio della funzione, si dice **massimo relativo**.

DEFINIZIONE

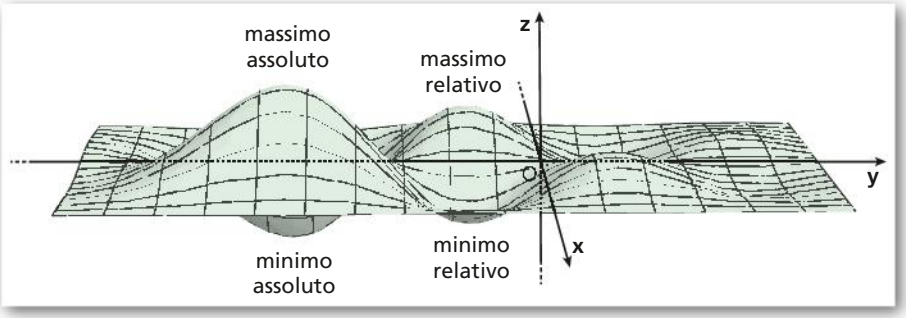
Se $z = f(x; y)$ è una funzione definita in un insieme aperto D, $P_0(x_0; y_0) \in D$ è un punto di minimo relativo per la funzione se per tutti i punti di un intorno di P_0, incluso in D, si verifica:

$$f(x; y) \geq f(x_0; y_0).$$

Il numero $f(x_0; y_0)$, appartenente al codominio della funzione, si dice **minimo relativo**.

Se le stesse relazioni si verificano non solo in un intorno di $P_0(x_0; y_0)$, ma per ogni punto di D, parliamo di **massimo assoluto** e di **minimo assoluto**.

ESEMPIO



I punti di massimo e di minimo sono detti **punti estremanti** della funzione.

Ricerca dei massimi e minimi relativi

La ricerca dei massimi e minimi relativi si può effettuare in due modi:

- attraverso la rappresentazione della funzione con le linee di livello:
- mediante le derivate parziali.

Partiamo dall'esame dei **massimi e minimi liberi**, in cui cioè non esistono condizioni o legami tra le variabili.

Ricerca dei massimi e minimi con le linee di livello

ESEMPIO

Consideriamo la funzione: $z = 6y - x^2 - y^2$.
Le linee di livello hanno equazione

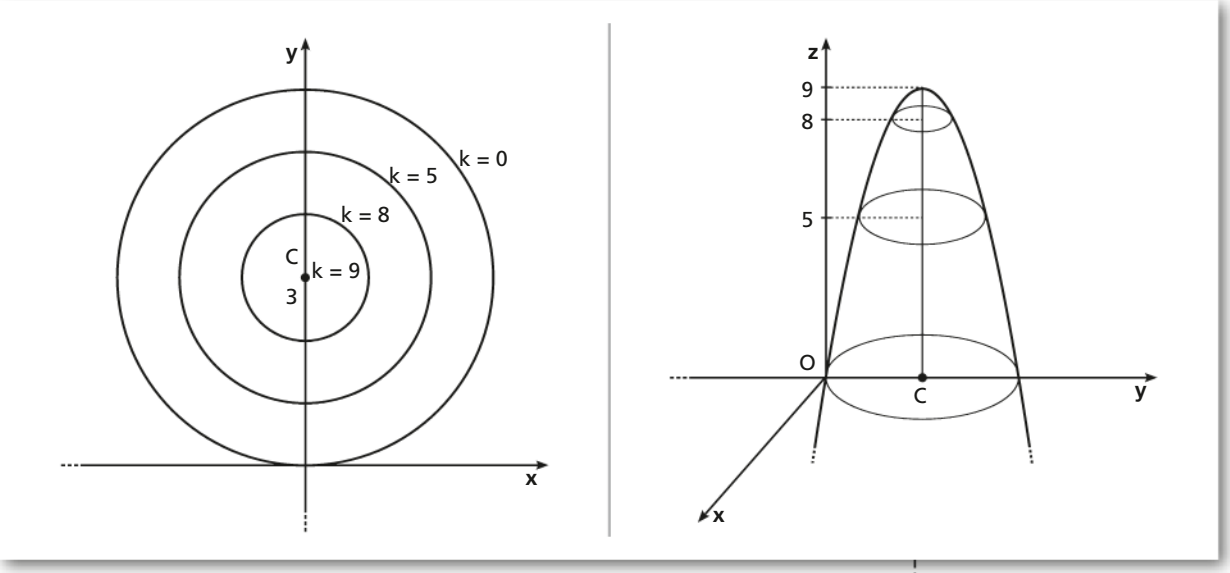
$$6y - x^2 - y^2 = k \rightarrow x^2 + y^2 - 6y + k = 0.$$

Al variare di k l'equazione rappresenta una circonferenza di centro $C(0; 3)$ e raggio $r = \sqrt{9 - k}$, reale per $k \leq 9$.

Rappresentiamo alcune linee di livello:

- per $k = 9$: circonferenza di raggio 0 che si riduce al punto C;
- per $k = 8$: circonferenza di raggio 1;
- per $k = 5$: circonferenza di raggio 2;
- per $k = 0$: circonferenza di raggio 3.

Le linee di livello sono circonferenze che per valori crescenti di k tendono, restringendosi, al punto $C(0; 3)$, che è punto di *massimo relativo*.



Nell'esempio abbiamo visto che le linee di livello in corrispondenza del massimo si restringono e tendono a ridursi a un unico punto.
Se le linee di livello tendono a ridursi a un punto C per valori crescenti di k, in C c'è un massimo relativo; se invece tendono a C per valori decrescenti di k, in C c'è un minimo relativo.

► Mediante le linee di livello, determina i punti di massimo e minimo per la funzione $z = x^2 + y^2 + 4y$.

Ricerca dei massimi e dei minimi relativi mediante le derivate parziali

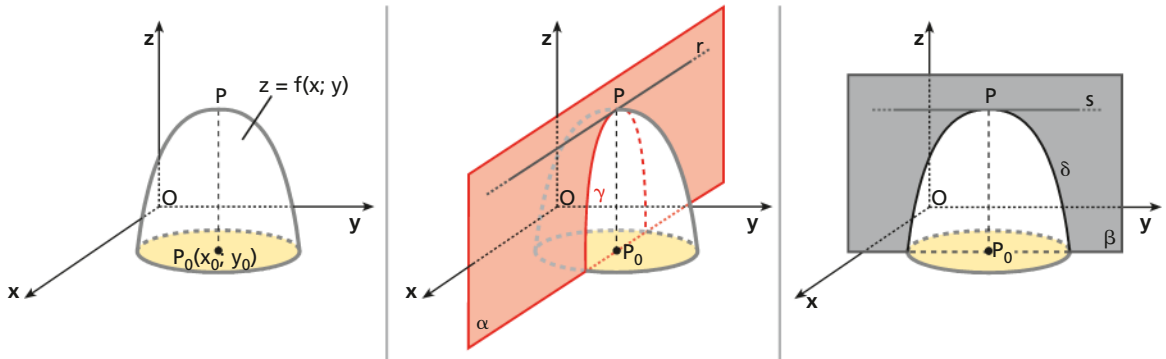
Consideriamo il grafico di una funzione $z = f(x; y)$ derivabile parzialmente e continua nel suo dominio D, e dotata di massimo relativo in un punto $P_0(x_0; y_0) \in D$ (figura **a** nella pagina seguente). Tracciamo per P_0 un piano α (figura **b** nella pagina seguente) parallelo al piano Oxz.
Tale piano interseca la superficie secondo la curva γ di equazione $z = f(x; y_0)$, che si ottiene dal sistema $\begin{cases} z = f(x; y) \\ y = y_0 \end{cases}$.

In base alle ipotesi formulate su $f(x; y)$ e sulle sue derivate parziali, la curva γ nel punto P_0 ha un massimo, e ha come tangente la retta r; vedremo che r è necessariamente orizzontale.

Tracciamo ora per P_0 un altro piano β (figura **c** nella pagina seguente), questa volta parallelo al piano Oyz. Tale piano interseca la superficie secondo la curva δ di equazione $z = f(x_0; y)$, che si ottiene dal sistema $\begin{cases} z = f(x; q) \\ x = x_0 \end{cases}$.

Come la curva γ, anche la curva δ ha in P_0 un massimo e come tangente una retta s, che deve essere orizzontale.

La funzione $z = f(x; y_0)$, che descrive la curva γ, è infatti funzione della sola variabile x e ha come derivata la derivata parziale della funzione f rispetto a x; poiché in x_0 c'è un massimo, deve essere $f'_x(x_0; y_0) = 0$ (una funzione di una variabile, se è derivabile, in un punto di massimo relativo ha necessariamente derivata nulla, e quindi tangente orizzontale).
Analogamente $z = f(x_0; y)$ ha come derivata la derivata parziale rispetto a y e, poiché in y_0 c'è un massimo, deve essere $f'_y(x_0; y_0) = 0$.



a. Il punto P_0 è di massimo per la funzione $z = f(x; y)$.

b. Il piano $y = y_0$ interseca il grafico secondo la curva γ che nel punto P ha tangente orizzontale.

c. Il piano $x = x_0$ interseca il grafico secondo la curva δ che nel punto P ha tangente orizzontale.

Per un punto di minimo relativo si possono fare considerazioni analoghe. In generale si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA

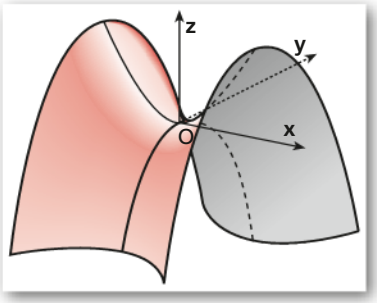
Condizione necessaria perché una funzione $z = f(x; y)$ differenziabile abbia un punto di massimo o di minimo relativo in un punto $P_0(x_0; y_0)$ del suo dominio è che siano nulle le sue derivate parziali in P_0, ossia:

$$f'_x(x_0; y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f'_y(x_0; y_0) = 0.$$

Il teorema enunciato è una condizione necessaria ma non sufficiente. Questo significa che è possibile che le derivate parziali si annullino entrambe in un punto, ma che tale punto non sia di massimo o di minimo.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $z = f(x; y) = \frac{1}{32}x^2 - \frac{1}{18}y^2$, che ha il grafico riportato nella figura.



Calcoliamo le derivate parziali:

$$z'_x = \frac{1}{16}x \quad \text{e} \quad z'_y = -\frac{1}{9}y$$

e cerchiamo i punti in cui si annullano:

$$z'_x = 0 \rightarrow x = 0,$$

$$z'_y = 0 \rightarrow y = 0.$$

L'origine è quindi un punto in cui le derivate parziali prime sono nulle, tuttavia non è un punto di massimo o minimo. Infatti, come possiamo osservare nel grafico, nell'origine è $z = f(0; 0) = 0$, ma in ogni intorno di O ci sono punti per i quali $f(x; y) > 0$ e punti per i quali $f(x; y) < 0$.

Il punto esaminato nell'esempio viene detto *punto di sella*.

DEFINIZIONE

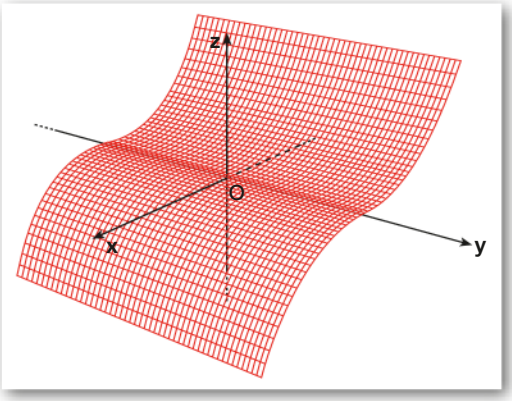
Data la funzione $f(x; y)$ definita in D, un punto interno di D è **stazionario** per f se nel punto f è differenziabile e si annullano entrambe le derivate parziali di f.

I punti stazionari di una funzione di due variabili possono essere punti di massimo o minimo relativo oppure di sella.

DEFINIZIONE

Un **punto di sella** è un punto stazionario che non è di massimo o di minimo relativo.

ESEMPIO



Nella figura a fianco è rappresentata una funzione per cui tutti i punti dell'asse y sono di sella.

Per dare una condizione sufficiente per determinare i punti di massimo o minimo relativo o di sella di una funzione $z = (x; y)$ definiamo il seguente determinante, detto **hessiano**, in cui gli elementi sono le derivate parziali seconde.

$$H(x; y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Sapendo che il valore di un determinante $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ è $ad - bc$, e ricordando che $f''_{xy} = f''_{yx}$ (per il teorema di Schwarz), otteniamo:

$$H(x; y) = f''_{xx}\, f''_{yy} - (f''_{xy})^2.$$

Vale il seguente teorema, dovuto al matematico tedesco Hesse.

TEOREMA

Hessiano e punti stazionari

Sia $P_0(x_0; y_0)$ un punto stazionario di $f(x; y)$, continua e con derivate parziali seconde continue. Se:

- $H(x_0; y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$, P_0 è punto di massimo relativo;
- $H(x_0; y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$, P_0 è punto di minimo relativo;
- $H(x_0; y_0) < 0$, P_0 è punto di sella;
- $H(x_0; y_0) = 0$, nulla si può dire riguardo a P_0.

In sintesi

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi e di sella di una funzione $z = f(x; y)$:

- risolviamo $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$, ottenendo i punti stazionari;

- calcoliamo $H(x; y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$;
- sostituiamo in H le coordinate di ogni punto stazionario P;
  - se $H_p < 0$, P è un punto di sella;
  - se $H_p > 0$ e $f''_{xx} < 0$, P è un punto di massimo relativo;
  - se $H_p > 0$ e $f''_{xx} > 0$, P è un punto di minimo relativo;
  - se $H_p = 0$, non si può dire nulla su P.

ESEMPIO

Esaminiamo i punti stazionari della funzione:

$$f(x; y) = 3x^3 + 9xy^2 - 5x + 4y.$$

- Risolviamo il sistema delle derivate parziali prime poste uguali a 0:

$$\begin{cases} f'_{xx} = 0 \\ f'_{yy} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x^2 + 9y^2 - 5 = 0 \\ 18xy + 4 = 0 \end{cases}.$$

  Otteniamo le quattro soluzioni:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

  Queste corrispondono ai quattro punti stazionari

$$A\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right); \quad B\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right); \quad C\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right); \quad D\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

- Calcoliamo le derivate parziali seconde e l'hessiano.

$$f''_{xx} = 18x; \; f''_{xy} = f''_{yx} = 18y; \; f''_{yy} = 18x,$$

$$H = \begin{vmatrix} 18x & 18y \\ 18y & 18x \end{vmatrix} = 324x^2 - 324y^2 = 324(x^2 - y^2).$$

- Calcoliamo l'hessiano in ciascun punto stazionario.

$$H_A = -108 < 0, \quad H_B = -108 < 0, \quad H_C = 108 > 0, \quad H_D = 108 > 0.$$

  Dal segno dell'hessiano deduciamo che A e B sono punti di sella, C e D di massimo o di minimo relativo. Per C e D calcoliamo:

$$f''_{xx}\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) = -12 < 0, \text{ perciò } C \text{ è punto di massimo relativo.}$$

$$f''_{xx}\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) = 12 > 0, \text{ perciò } D \text{ è punto di minimo relativo.}$$

  Di ciascun punto calcoliamo poi la quota z per avere il punto sulla superficie. Otteniamo:

$$f_D = -\frac{28}{9}, \quad f_C = \frac{28}{9}, \quad f_A = \frac{26}{9}, \quad f_B = -\frac{26}{9}.$$

▶ Studia i punti stazionari della funzione $z = x^2 - y^3 + x + y^2$.

6 Massimi e minimi vincolati

▶ Esercizi a p. 1156

In numerosi problemi scientifici o economici è necessario rendere minima o massima una funzione a certe condizioni tra le variabili in gioco. Tali condizioni pos-

sono essere espresse da un'equazione $g(x; y) = 0$ che si chiama **equazione del vincolo**, e si parla di **massimi e minimi vincolati**. Per distinguerli da questi, chiameremo quelli che abbiamo studiato finora **massimi e minimi liberi**.

Per determinare i massimi e minimi vincolati occorre cercare i massimi e minimi della funzione data nei punti di intersezione del suo dominio con la linea che rappresenta il vincolo. Esistono vari metodi per la ricerca dei massimi e minimi vincolati.

Metodo di sostituzione

Il metodo di sostituzione è un metodo utilizzato per determinare i massimi e i minimi vincolati.

ESEMPIO

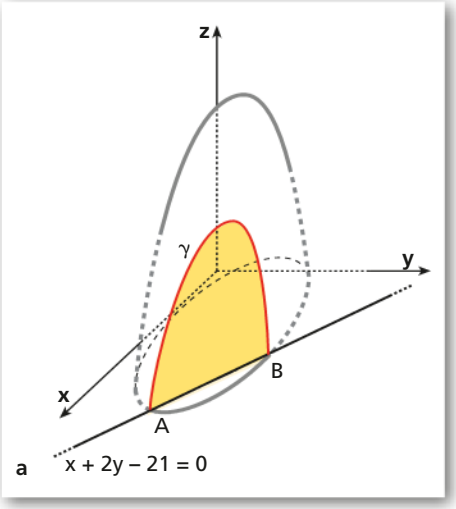
Determiniamo i massimi e minimi della funzione

$$z = f(x; y) = \frac{1}{2}(-x^2 - 4y^2 + 10x + 32y - 41)$$

con il seguente vincolo:

$$x + 2y - 21 = 0.$$

La funzione può assumere soltanto i valori relativi ai punti appartenenti alla curva γ indicata nella figura **a**.



Risolviamo il sistema:

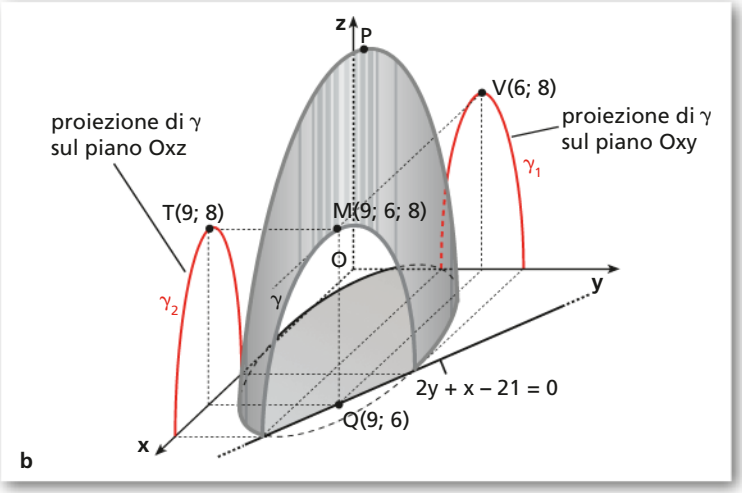
$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}(-x^2 - 4y^2 + 10x + 32y - 41) \\ x + 2y - 21 = 0 \end{cases}$$

Esplicitando la variabile x nell'equazione del vincolo, in questo caso una retta, e sostituendo nella prima equazione, otteniamo

$$z_1 = -4y^2 + 48y - 136,$$

che ha per grafico la parabola γ_1 (figura **b** nella pagina seguente), appartenente al piano Oyz. γ_1 ha concavità verso il basso, quindi il massimo è nel suo vertice $V(6; 8)$.

▶ Con il metodo di sostituzione, determina massimi e minimi della funzione $z = f(x; y) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2 + y^2 - y$ con il vincolo di equazione $2x + y - 1 = 0$.



Quindi la funzione f ha un massimo vincolato $z = 8$ nel punto Q della retta $x + 2y - 21 = 0$, di ordinata $y = 6$. Sostituendo, calcoliamo la sua ascissa x:

$$x + 2 \cdot 6 - 21 = 0 \rightarrow x = 9.$$

Concludiamo che la funzione f, in relazione al vincolo dato, ha massimo in $M(9; 6; 8)$.
Se nel sistema, invece di esplicitare la variabile x, esplicitiamo la variabile y, otteniamo la parabola γ_2 di equazione $z_2 = -x^2 + 18x - 73$ sul piano Oxz, di vertice $T(9; 8)$, e ricaviamo ancora che il massimo di z è 8.

Di solito, i massimi e i minimi vincolati non coincidono con quelli liberi. Puoi verificare che il punto $P(5; 4; 24)$ segnato nella figura **b** dell'esempio è quello di massimo libero.

In generale, per determinare con il metodo di sostituzione i massimi o i minimi vincolati di una funzione $z = f(x; y)$ soggetta al vincolo $g(x; y) = 0$:

- esplicitiamo (se possibile) una variabile nella funzione $g(x; y) = 0$;
- sostituiamo la variabile esplicitata nell'espressione della funzione $z = f(x; y)$ e otteniamo una nuova funzione di una sola variabile;
- determiniamo i massimi o i minimi di questa nuova funzione e da questi otteniamo i massimi e i minimi vincolati di $z = f(x; y)$.

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Non sempre è possibile utilizzare il metodo di sostituzione. Un metodo generale si ottiene, invece, con l'introduzione di una nuova funzione che trasforma i massimi e minimi vincolati in massimi e minimi liberi.
Consideriamo la funzione $z = f(x; y)$, con derivate parziali prime e seconde continue nel suo dominio D e soggetta al vincolo $g(x; y) = 0$, dove g abbia derivate prime non nulle contemporaneamente.
Costruiamo la funzione:

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \cdot g(x; y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La funzione L si chiama **lagrangiana**, e dipende dalle tre variabili x, y, λ. Il fattore λ si chiama **moltiplicatore di Lagrange**.

Si può dimostrare che i punti di massimo e minimo vincolato sono fra quelli le cui

coordinate soddisfano le seguenti condizioni.

$$\begin{cases} L'_x(x;\,y;\,\lambda)=0 \\ L'_y(x;\,y;\,\lambda)=0 \\ L'_\lambda(x;\,y;\,\lambda)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f'_x(x;\,y)+\lambda g'_x(x;\,y)=0 \\ f'_y(x;\,y)+\lambda g'_y(x;\,y)=0 \\ g(x;\,y)=0 \end{cases}$$

Sia $P_0(x_0;\,y_0)$ un punto le cui coordinate soddisfano le condizioni insieme alla costante λ_0. Per stabilire se P_0 è un punto di massimo o di minimo relativo, consideriamo l'**hessiano orlato** definito dal determinante:

$$\overline{H}=\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Si dimostra che se:

- $\overline{H}(x_0;\,y_0;\,\lambda_0)>0$, la funzione f ammette un massimo vincolato in P_0;
- $\overline{H}(x_0;\,y_0;\,\lambda_0)<0$, la funzione f ammette un minimo vincolato in P_0;
- $\overline{H}(x_0;\,y_0;\,\lambda_0)=0$, nulla si può dire riguardo a P_0.

ESEMPIO

Riprendiamo la funzione studiata con il metodo di sostituzione:

$$f(x;\,y)=\frac{1}{2}(-x^2-4y^2+10x+32y-41),$$

con il vincolo $g(x;\,y)=x+2y-21$.

Scriviamo la funzione lagrangiana:

$$L(x;\,y;\,\lambda)=f(x;\,y)+\lambda g(x;\,y)=$$

$$\frac{1}{2}(-x^2-4y^2+10x+32y-41)+\lambda(x+2y-21).$$

Calcoliamo le derivate parziali prime della funzione lagrangiana rispetto alle tre variabili x, y, λ.

$$L'_x=-x+5+\lambda;\quad L'_y=-4y+16+2\lambda;\quad L'_\lambda=x+2y-21.$$

Troviamo i punti stazionari di L risolvendo il sistema delle tre condizioni.

$$\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ L'_\lambda=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+5+\lambda=0 \\ -4y+16+2\lambda=0 \\ x+2y-21=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=6 \\ \lambda=4 \end{cases}$$

L ha soltanto un punto stazionario: $(9;\,6;\,4)$.
Determiniamo gli elementi dell'hessiano orlato:

$$g'_x=1,\qquad g'_y=2;$$

$$L''_{xx}=-1,\qquad L''_{xy}=L''_{yx}=0,\ L''_{yy}=-4.$$

Negli elementi non compaiono le variabili, quindi essi sono uguali per tutti i punti.
Calcoliamo l'hessiano orlato.

$$\overline{H}(x;\,y;\,\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=4+4=8$$

TEORIA

▶ Ricerca i massimi/minimi della funzione $z = f(x; y) = \frac{x^2}{4} - y^2$ soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 4$ applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

In particolare: $\overline{H}(9; 6; 4) = 8 > 0$. Il punto $Q(9; 6)$ è pertanto punto di massimo vincolato e il corrispondente massimo è $f(9; 6) = 8$.

In generale, per determinare massimi e minimi di una funzione $z = f(x; y)$ soggetta al vincolo $g(x; y) = 0$ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

- scriviamo la funzione lagrangiana $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda g(x; y)$;
- troviamo i punti stazionari di L risolvendo il sistema delle condizioni

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases};$$

- determiniamo l'hessiano orlato $\overline{H}(x; y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xyx} & L''_{yy} \end{vmatrix}$, e calcoliamo il suo valore in corrispondenza dei punti stazionari trovati;
- analizziamo il segno del determinante $\overline{H}$ nei punti stazionari $P_0(x_0; y_0)$:
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) > 0$, allora f ha un massimo vincolato in $P_0(x_0; y_0)$,
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) < 0$, allora f ha un minimo vincolato in $P_0(x_0; y_0)$,
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) = 0$, allora non si può concludere nulla riguardo a $P_0(x_0; y_0)$.

7 Massimi e minimi assoluti

▶ Esercizi a p. 1160

Se per una funzione $z = f(x; y)$ è necessario determinare il massimo o il minimo assoluto in un sottoinsieme A del dominio, la ricerca è facilitata dal teorema di Weierstrass, che assicura l'esistenza degli estremi assoluti di una funzione continua in A, se A è un insieme chiuso e limitato.

TEOREMA

Teorema di Weierstrass

Se una funzione $z = f(x; y)$ è continua in un insieme limitato e chiuso I, è dotata di massimo assoluto e di minimo assoluto in I.

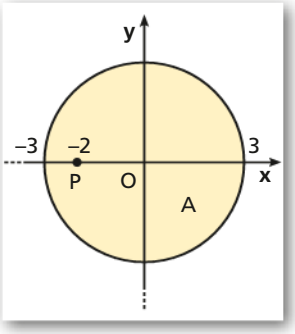
Per trovare il massimo o il minimo assoluto di una funzione $z = f(x; y)$ definita in $A \subseteq D$ chiuso e limitato occorre:

- determinare i massimi e i minimi liberi in A;
- determinare i massimi e i minimi vincolati, dove i vincoli sono espressi dalle equazioni delle curve che definiscono la frontiera di A;
- confrontare le quote dei punti trovati e scegliere il valore massimo o minimo.

ESEMPIO

Determiniamo il massimo e il minimo assoluto della funzione $f(x; y) = 2x^2 + 2y^2 + 8x + 6$ nell'insieme A dei punti del dominio che hanno distanza dall'origine minore o uguale a 3.

L'insieme A corrisponde al cerchio con centro nell'origine e raggio 3. La frontiera dell'insieme A è la circonferenza di equazione $x^2+y^2-9=0$.



- Determiniamo i massimi e i minimi relativi liberi della funzione. Risolviamo il sistema delle derivate parziali prime poste uguali a 0:

$$\begin{cases} 4x+8=0 \\ 4y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Il punto stazionario $P(-2;0)$ appartiene all'insieme A, come vediamo nella figura.
Calcoliamo le derivate parziali seconde,

$$f''_{xx}=4; \quad f''_{yy}=4; \quad f''_{xy}=f''_{yx}=0,$$

e l'hessiano in $P(-2;0)$:

$$H(-2;0)=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=16>0, \qquad \text{con } f''_{xx}=4>0.$$

Quindi $P(-2;0)$ è un punto di minimo relativo per f interno ad A.
La quota di P è $f(-2;0)=-2$.

- Determiniamo i massimi e i minimi vincolati esprimendo il vincolo con l'equazione $g(x;y)=0$, dove $g(x;y)=x^2+y^2-9$, linea dei punti di frontiera di A.
Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Scriviamo la funzione lagrangiana

$$L(x;y;\lambda)=2x^2+2y^2+8x+6+\lambda(x^2+y^2-9).$$

Risolviamo il sistema delle derivate parziali prime della funzione lagrangiana poste uguali a 0.

$$\begin{cases} 4x+8+2\lambda x=0 \\ 4y+2\lambda y=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \rightarrow 2y(2+\lambda)=0 < \begin{matrix} y=0 \\ \lambda=-2 \end{matrix}$$

La seconda equazione è risolta per $y=0$ oppure $\lambda=-2$. Vediamo separatamente i due casi:

$$\begin{cases} \lambda=-\dfrac{2x+4}{x} \\ y=0 \\ x^2=9 \end{cases} \rightarrow Q_\lambda: \begin{cases} \lambda=-\dfrac{10}{3} \\ y=0 \\ x=3 \end{cases} \vee \; R_\lambda: \begin{cases} \lambda=-\dfrac{2}{3} \\ y=0 \\ x=-3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 4x+8-4x=0 \\ \lambda=-2 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8=0 \\ \lambda=-2 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases} \rightarrow \text{impossibile}.$$

I punti stazionari per la funzione L sono $Q_\lambda\left(3;0;-\dfrac{10}{3}\right)$ e $R_\lambda\left(-3;0;-\dfrac{2}{3}\right)$.

Determiniamo gli elementi dell'hessiano orlato e scriviamo la sua espressione per x, y e λ generici.

$g'_x = 2x, \quad g'_y = 2y;$

$L''_{xx} = 4 + 2\lambda, \quad L''_{yy} = 4 + 2\lambda, \quad L''_{xy} = L''_{yx} = 0;$

$$\overline{H}(x; y; \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 4+2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 4+2\lambda \end{vmatrix} = -4x^2(4+2\lambda) - 4y^2(4+2\lambda).$$

Sostituiamo le coordinate di Q_λ e R_λ:

$\overline{H}\left(3; 0; -\frac{10}{3}\right) = +96 > 0 \rightarrow Q_\lambda$ è un massimo vincolato,

$\overline{H}\left(-3; 0; -\frac{2}{3}\right) = -96 < 0 \rightarrow R_\lambda$ è un minimo vincolato.

Calcoliamo le quote dei punti $Q(3; 0)$ e $R(-3; 0)$:

$Z_Q = f(3; 0) = 48;$

$Z_R = f(-3; 0) = 0.$

- Confrontiamo i punti di massimo e minimo trovati:

  $P(-2; 0), \quad Z_P = -2, \quad$ minimo relativo libero;

  $Q(3; 0), \quad Z_Q = 48, \quad$ massimo vincolato;

  $R(-3; 0), \quad Z_Q = 0, \quad$ minimo vincolato.

  Il punto di massimo assoluto in A è $Q(3; 0)$, il massimo assoluto è 48.
  Il punto di minimo assoluto in A è $P(-2; 0)$, il minimo assoluto è -2.

MATEMATICA E GEOGRAFIA

Dall'alba al tramonto Sappiamo per esperienza personale che la durata del dì varia al variare del giorno dell'anno: d'inverno le ore di luce sono di meno, d'estate di più.
La lunghezza del dì dipende poi dal luogo in cui ci troviamo. Per esempio, in uno stesso giorno dell'anno, a seconda della latitudine può essere di 22 ore, oppure di 12, o anche solo di 4.

▶ Quante ore di luce abbiamo oggi?

La risposta

IN SINTESI
Funzioni di due variabili

Geometria cartesiana nello spazio

- Per individuare un punto dello spazio sono necessarie tre coordinate: **ascissa**, **ordinata**, **quota**.
- Nello spazio, un **piano** ha **equazione generica**

$$z = mx + ny + q \ (m, n, q \in \mathbb{R}), \text{ ovvero } ax + by + cz + d = 0.$$

Funzioni di due variabili

- **Funzione reale di due variabili reali**: è una relazione che associa a ogni coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$, appartenente a un sottoinsieme S di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, uno e un solo numero reale z.
  La indichiamo con $z = f(x; y)$, oppure con $f: (x; y) \mapsto z$, con $(x; y) \in S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$.
- Il sottoinsieme S è detto **dominio** della funzione e l'insieme dei valori corrispondenti z è detto **codominio** della funzione.
- **Dominio naturale**: è il più ampio dominio che si può scegliere per la funzione.
- Il **grafico** di una funzione $z = f(x; y)$ è l'insieme dei punti di coordinate $(x; y; z)$ per cui $z = f(x; y)$.
- Le **linee di livello** sono le proiezioni ortogonali sul piano Oxy delle curve ottenuto intersecando il grafico della funzione con i piani di equazione $z = k$.

Derivate parziali

- **Derivata parziale** di una funzione $z = f(x; y)$, rispetto alla variabile x, nel punto $P_0(x_0; y_0)$:

$$f'_x(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h; y_0) - f(x_0; y_0)}{h}.$$

  E, analogamente, rispetto alla variabile y:

$$f'_y(x_0; y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + h) - f(x_0; y_0)}{h}.$$

- Se delle derivate parziali è possibile calcolare le derivate, queste vengono dette **derivate parziali seconde**.
  Indichiamo le derivate seconde con

$$f''_{xx}, \ f''_{xy}, \ f''_{yx}, \ f''_{yy},$$

  dove, per esempio, f''_{yx} significa «derivata rispetto a y della derivata rispetto a x».
  Le derivate f''_{xy} e f''_{yx} sono dette *derivate miste*.

- **Teorema di Schwarz**
  Se una funzione $z = f(x; y)$ ha le derivate seconde miste continue in un insieme aperto I, per ogni punto di I vale:

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

- Una funzione $z = f(x; y)$ è **differenziabile** nel punto $P_0(x_0; y_0)$ se l'incremento Δf si può scrivere nella forma

$$\Delta f = f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y + \alpha \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \text{ con } \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0.$$

  $f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$ è il **differenziale totale** di f nel punto $P_0(x_0; y_0)$ e si indica con df;
  $f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x$ è il **differenziale parziale rispetto a x** nel punto $P_0(x_0; y_0)$;
  $f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$ è il **differenziale parziale rispetto a y** nel punto $P_0(x_0; y_0)$.

  Essendo $dx = \Delta x$ e $dy = \Delta y$, possiamo scrivere:

$$df = f'_x(x_0; y_0) \cdot dx + f'_y(x_0; y_0) \cdot dy.$$

  Se una funzione $z = f(x; y)$ è **differenziabile** nel punto $P_0(x_0; y_0)$, allora è anche **continua**.

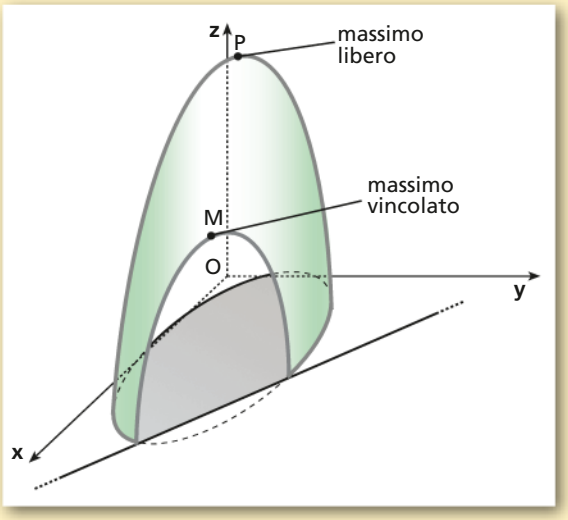
TEORIA

Massimi e minimi

- Data una funzione $z = f(x;\ y)$, definita in un insieme aperto D, il punto $P_0(x_0; y_0)$ di D si dice:
  - **punto di massimo relativo** se esiste un intorno di P_0, incluso in D, per i cui punti valga $f(x; y) \leq f(x_0; y_0)$;
  - **punto di minimo relativo** se esiste un intorno di P_0, incluso in D, per i cui punti valga $f(x; y) \geq f(x_0; y_0)$.
- Se le precedenti relazioni sussistono per ogni punto di D, il punto $(x_0; y_0)$ è di **massimo assoluto** o **minimo assoluto**. I punti di massimo o minimo sono detti punti **estremanti** della funzione.
  Teorema di Weierstrass
  Se una funzione $z = f(x;\ y)$ è continua in un insieme limitato e chiuso I, ammette massimo e minimo assoluto in I.
- La ricerca dei massimi e minimi relativi si può fare con le linee di livello o mediante le derivate parziali.
- **Condizione necessaria** perché una funzione $z = f(x;\ y)$ differenziabile abbia un punto di massimo o di minimo relativo in $P(x_0; y_0)$ è che
  $$f'_x(x_0; y_0) = f'_y(x_0; y_0) = 0.$$
- **Punti stazionari**: punti per i quali si annullano le derivate parziali prime.
- **Punto di sella**: ogni punto stazionario che non sia di massimo o di minimo relativo.
- **Hessiano**: $H = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2$.
- Sia $P_0(x_0; y_0)$ un punto stazionario per la funzione $z = f(x; y)$ e H l'hessiano di f. Se:
  - $H(x_0; y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0; y_0) < 0$, P_0 è punto di massimo relativo;
  - $H(x_0; y_0) > 0$ e $f''_{xx}(x_0; y_0) > 0$, P_0 è punto di minimo relativo;
  - $H(x_0; y_0) < 0$, P_0 è punto di sella;
  - $H(x_0; y_0) = 0$, nulla si può dire riguardo a P_0.

Massimi e minimi vincolati

- **Massimi e minimi vincolati**: quando le variabili di una funzione non sono libere di assumere qualsiasi valore del suo dominio, ma sono legate tra loro da una relazione espressa da un'equazione $g(x;\ y) = 0$, detta *equazione del vincolo*, gli eventuali massimi o minimi della funzione si dicono **massimi o minimi vincolati**.
- Per determinare i massimi e i minimi vincolati a volte si può utilizzare il **metodo di sostituzione**, che consiste nell'esplicitare una variabile dall'equazione del vincolo e sostituirla nella funzione. Si ottiene una nuova funzione i cui massimi e minimi sono quelli vincolati della funzione data.
- Un metodo generale per determinare i massimi e i minimi vincolati di una funzione $z = f(x;\ y)$ soggetta al vincolo $g(x;\ y) = 0$ è il **metodo dei moltiplicatori di Lagrange**.
  - Si considera la **funzione lagrangiana**:
    $$L(x;\ y;\ \lambda) = f(x;\ y) + \lambda \cdot g(x;\ y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$
  - Si determinano i punti $P_0(x_0; y_0)$ e le relative costanti λ_0 tali che:
    $$\begin{cases} L'_x(x;\ y;\ \lambda) = 0 \\ L'_y(x;\ y;\ \lambda) = 0. \\ L'_\lambda(x;\ y;\ \lambda) = 0 \end{cases}$$
- Considerato l'**hessiano orlato**
  $$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix},$$
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) > 0$, la funzione f ammette un massimo vincolato in P_0;
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) < 0$, la funzione f ammette un minimo vincolato in P_0;
  - se $\overline{H}(x_0; y_0; \lambda_0) = 0$, nulla si può dire riguardo a P_0.



CAPITOLO 21
ESERCIZI

1 Disequazioni in due incognite

Disequazioni lineari

▶ Teoria a p. 1102

1 **RIFLETTI SULLA TEORIA** Spiega che cos'è una disequazione lineare in due variabili e indica un procedimento per risolverla, aiutandoti con un esempio.

2 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo graficamente la disequazione $3x + 2y - 5 > 1 - x + y$.

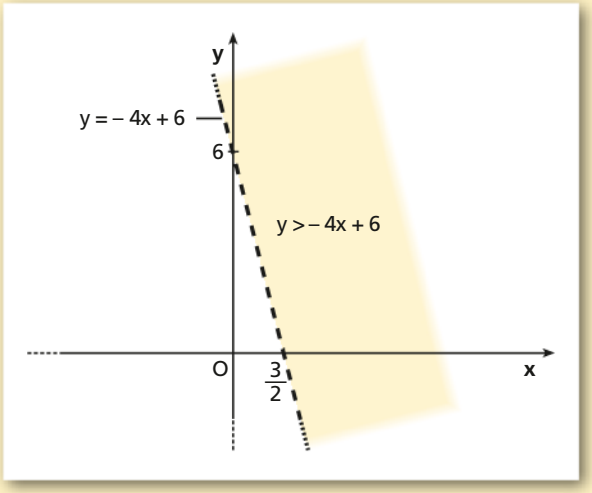
Svolgiamo i calcoli e isoliamo y: $y > 6 - 4x$.

Tracciamo la retta di equazione $y = 6 - 4x$.

La soluzione è costituita da tutti i punti $(x; y)$ le cui ordinate superano quelle dei punti sulla retta che hanno la stessa ascissa x. Tali punti si trovano sul semipiano colorato in figura.

In alternativa, possiamo usare il metodo del punto di prova. Sostituiamo nella disequazione le coordinate di un punto che non appartenga alla retta, per esempio $O(0; 0)$. Risulta $0 < 6$, quindi la disequazione non è verificata dalle coordinate di O e non lo è neppure da quelle di tutti i punti appartenenti al suo semipiano.

Nella disequazione il primo membro non può essere uguale al secondo, quindi i punti della retta non rappresentano soluzioni della disequazione e li rappresentiamo con una linea tratteggiata.



Risolvi graficamente le seguenti disequazioni lineari in due incognite.

3 $x + 5 \leq 0$

4 $x - 2y + 3 \geq 0$

5 $5 < x - y$

6 $x - y + 5 \geq 2x$

7 $5x > 2y - 3$

8 $10y - 7 \leq 8x$

9 $-2y > 3$

10 $4 - x - y \leq 0$

11 $3x - 6 > y$

12 $\frac{x}{2} - 1 \leq \frac{y}{4}$

13 $3x - 1 \geq \frac{1}{2}$

14 $(3x - 2y) \leq 2(-y + x + 2)$

15 $2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) - \frac{1}{2}(2x + y) \leq 0$

16 $2x + y > -2$

17 $7x \leq 2y + 1$

18 $2x - \sqrt{2}\,y < 0$

19 $3(2 - x) + 2(y - 3) < 4(x - y)$

20 $\frac{y - 4}{2} - \frac{x + 1}{3} \geq 0$

21 $x - 2y - 3(2 - x) \geq 0$

22 $\frac{1}{2}\left(x + \frac{14}{3}\right) + \frac{1}{2}(x + 3y) > 0$

23 $2(x - 1) \geq 3(y + 5)$

24 $4(x + 2y) \leq x + 2(4 - y)$

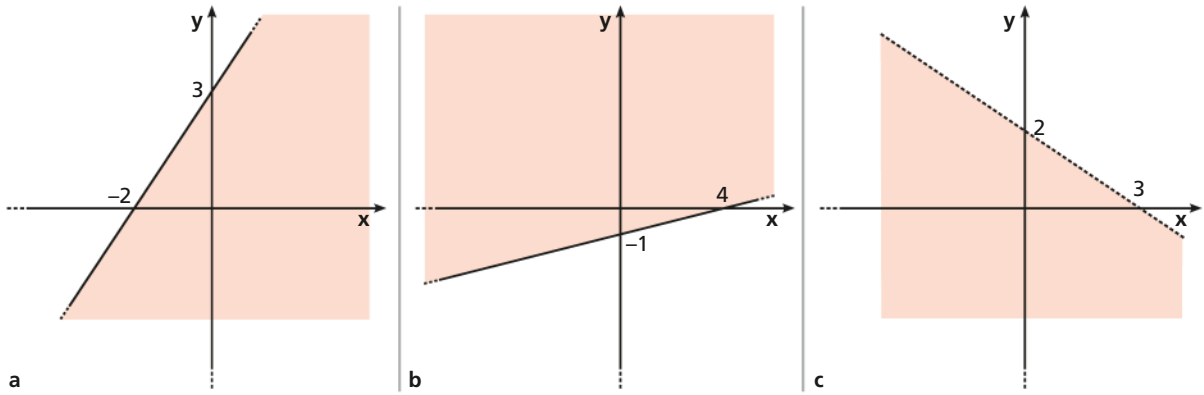
MATEMATICA E STORIA

Un problema di Eulero nel piano cartesiano Il problema 25 degli *Elementi di algebra* di Eulero recita così: «Trenta persone, uomini, donne e bambini, spendono 50 scudi in un albergo; la quota di un uomo è di 3 scudi, quella di una donna è di 2 scudi e quella di un bambino di uno scudo. Quanti sono gli uomini, le donne, i bambini?».

☐ Problema – Risoluzione – Esercizio in più

ESERCIZI

25 LEGGI IL GRAFICO Scrivi le disequazioni che hanno per soluzioni le regioni di piano in figura.



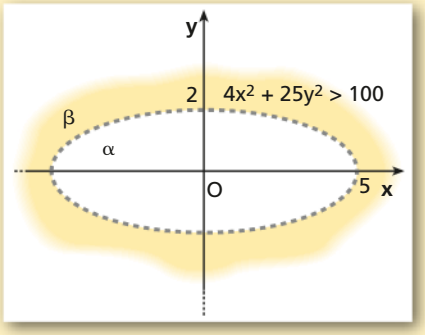
Disequazioni non lineari

▶ Teoria a p. 1105

26 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo graficamente la disequazione $4x^2 + 25y^2 > 100$.

Rappresentiamo $4x^2 + 25y^2 = 100$, che, dividendo entrambi i membri per 100, si può scrivere $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

È un'ellisse di semiassi $a = 5$ e $b = 2$, che divide il piano nelle regioni α e β. Consideriamo il punto di prova $O(0; 0)$. Sostituendo le sue coordinate nella disequazione, otteniamo $4 \cdot 0 + 25 \cdot 0 > 100$, quindi la disequazione non è verificata. L'insieme delle soluzioni della disequazione è allora rappresentato dalla regione β, esterna all'ellisse. I punti dell'ellisse non rappresentano soluzioni della disequazione, quindi disegniamo la curva con una linea tratteggiata.



Risolvi graficamente le seguenti disequazioni non lineari.

27 $x^2 + y^2 - 1 \leq 0$

28 $x^2 + 2y - 6 \leq 0$

29 $4x^2 + 9y^2 \leq 36$

30 $x^2 + y^2 \geq 9$

31 $x^2 + 4y^2 \geq 4$

32 $x^2 - 4x - y \geq 0$

33 $-x^2 + 4 - y \geq 0$

34 $x - y^2 \geq 0$

35 $x^2 + y^2 - 6x - 8y \leq 0$

36 $x^2 - y > 0$

37 $xy > 2$

38 $xy \geq -5$

39 $xy > 0$

40 $x^2 - 6x + 9 - y^2 > 0$

41 $x^2 - 4x + 4 + y < 0$

42 $2xy - 8 > 0$

43 $9x^2 + 4y^2 \geq 36$

44 $x^2 + y^2 - 6x + 8 \leq 0$

45 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo la disequazione $\ln(2x^2 + 1) - \ln(x^2 + y^2 + 2) \leq 0$.

Prima di tutto verifichiamo le condizioni di esistenza:

$2x^2 + 1 > 0 \wedge x^2 + y^2 + 2 > 0$ sono soddisfatte $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

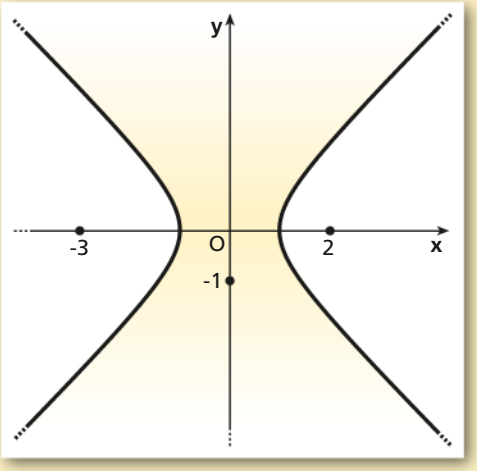
Scriviamo la disequazione in forma equivalente, ricordando che la base del logaritmo è maggiore di 1:

$\ln(2x^2 + 1) \leq \ln(x^2 + y^2 + 2) \rightarrow 2x^2 + 1 \leq x^2 + y^2 + 2 \rightarrow x^2 - y^2 \leq 1.$

Disegniamo l'iperbole equilatera corrispondente all'equazione associata $x^2 - y^2 = 1$.
Per trovare la parte di piano che rappresenta le soluzioni della disequazione utilizziamo un punto di prova, per esempio $(0; -1)$, e sostituiamo le coordinate:

$$0^2 - (-1)^2 \leq 1 \quad \rightarrow \quad \text{vero.}$$

Le soluzioni comprendono allora la parte di piano delimitata dai due rami di iperbole e contenente l'asse delle ordinate e l'iperbole stessa, perché nella disequazione compare il simbolo $\leq$.
Come ulteriore controllo, possiamo constatare che i punti di prova $(-3; 0)$ e $(2; 0)$ non verificano la disequazione.



Risolvi graficamente le seguenti disequazioni non lineari.

46 $\ln(x^2+1) - \ln(2+y^2) \geq 0$

47 $e^{xy-4} \geq 1$

48 $e^{x^2-1} - e^{2-y} \leq 0$

49 $e^{2xy+1} - e^{y-1} < 0$

50 $\ln(x^2+3y^2+2) < \ln(x^2+4)$

51 $\dfrac{e^{y+1}}{e^{x^2-1}} \leq 1$

52 $\log_{10}(x^2+y^2+4) \leq \log_{10} 6$

53 $e^{4y^2-2} \cdot e^{-x^2+4} \geq e^{-2}$

54 $\log_3(x^2+5) - \log_3(y^2+5) \geq 0$

55 $e^{x+y} > 1$

Sistemi di disequazioni

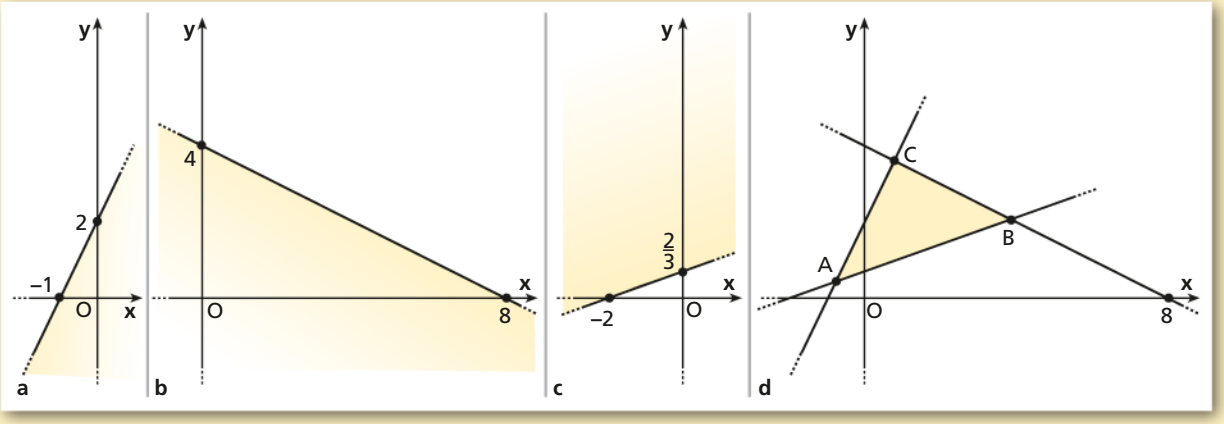
▶ Teoria a p. 1106

Sistemi lineari

56 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo graficamente il seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} y \leq 2(x+1) \\ 2y + x \leq 8 \\ x + 2 \leq 3y \end{cases}$$

Rappresentiamo, una alla volta, le singole equazioni dedotte dalle disequazioni del sistema. Sono le tre rette di equazioni $y = 2(x+1)$, $2y + x = 8$ e $x + 2 = 3y$. Utilizzando un punto di prova, individuiamo per ciascuna l'insieme delle soluzioni delle disequazioni (figure **a**, **b** e **c**).



Sovrapponendo le tre soluzioni parziali, determiniamo la parte di piano delimitata dal triangolo ABC (figura **d**) i cui punti , lati e vertici compresi, rappresentano le soluzioni del sistema.

ESERCIZI

Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni lineari in due incognite.

57 $\begin{cases} 2x+y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

58 $\begin{cases} 3x-2y+6 < 0 \\ x+y+2 \ge 0 \\ x < 0 \end{cases}$

59 $\begin{cases} y < -x+6 \\ y \ge x-4 \\ x-1 \ge 0 \end{cases}$

60 $\begin{cases} x+3y < 0 \\ 2x+2y \ge 1 \\ x \le 4 \end{cases}$

61 $\begin{cases} 3x+y+6 \ge 0 \\ x-y < 3 \\ 5-x < 2y \end{cases}$

62 $\begin{cases} x \le 2 \\ 2y < 6+x \\ 4x+3y \ge -3 \\ y \ge 0 \end{cases}$

63 $\begin{cases} y < 2x \\ 3x+y \le 27 \\ 6-y > 0 \\ x \ge 1 \\ 2y \ge -x \end{cases}$

64 $\begin{cases} 5x+y > 0 \\ x+5y > 15 \\ 3x-6 < 2y \\ x-2 < 0 \end{cases}$

65 $\begin{cases} x+2 \ge 0 \\ y+2x+3 \ge 0 \\ y \ge 3x-3 \\ 4y-x < 5 \\ y-1 < 0 \end{cases}$

66 $\begin{cases} x+y \le 6 \\ x+y \ge -1 \\ x+1 \ge 0 \\ y+4 \ge 0 \end{cases}$

67 $\begin{cases} y \ge x-4 \\ 2y+x \le 6 \\ x-y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

68 $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ y \le x+3 \end{cases}$

69 $\begin{cases} x-3y+9 \ge 0 \\ x-3y-3 \le 0 \\ x-3 \ge 0 \end{cases}$

70 $\begin{cases} y \le 2 \\ y > x+1 \\ x > -2 \end{cases}$

71 $\begin{cases} |x| \le 3 \\ y \ge x \\ y < 2 \end{cases}$

72 $\begin{cases} |x|-y \le 2 \\ y+x < 6 \end{cases}$

Sistemi non lineari

Rappresenta nel piano cartesiano l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi di disequazioni in due incognite.

73 $\begin{cases} x^2-y > 0 \\ x^2-4x-y \le 0 \end{cases}$

74 $\begin{cases} x^2+y^2-16 \le 0 \\ xy-1 < 0 \end{cases}$

75 $\begin{cases} x^2+y^2-1 \ge 0 \\ x^2+y^2-4 \le 0 \end{cases}$

76 $\begin{cases} -x^2+4-y \le 0 \\ x^2+y^2-9 \le 0 \end{cases}$

77 $\begin{cases} x^2+4y^2 \le 4 \\ x-y \ge 0 \end{cases}$

78 $\begin{cases} x^2+y^2-4 \ge 0 \\ xy-1 \ge 0 \end{cases}$

79 $\begin{cases} x^2+y^2-9 \le 0 \\ xy-1 \le 0 \end{cases}$

80 $\begin{cases} x^2+y^2-9 \le 0 \\ x+y^2-4 \ge 0 \end{cases}$

81 $\begin{cases} x^2+y^2-4 \ge 0 \\ y+x^2+4x \ge 0 \end{cases}$

82 $\begin{cases} x+2y-6 \ge 0 \\ x^2+4x-y \ge 0 \end{cases}$

83 $\begin{cases} x^2-y > 0 \\ xy > 2 \end{cases}$

84 $\begin{cases} x^2+y^2-4x-6y-12 \le 0 \\ -x^2+1-y \ge 0 \end{cases}$

85 $\begin{cases} x^2-4x-y \ge 0 \\ x^2-y > 0 \end{cases}$

86 $\begin{cases} x^2-6x+y \le 0 \\ -y+x^2-5x \le 0 \end{cases}$

87 $\begin{cases} 4x^2+9y^2 \le 36 \\ x-y \ge 0 \\ x+y < 1 \end{cases}$

88 $\begin{cases} 9x^2-4y^2 \ge 0 \\ x^2+y^2 \ge 4 \end{cases}$

89 $\begin{cases} 3xy \ge -15 \\ x^2-6x+9-y \ge 0 \end{cases}$

90 REALTÀ E MODELLI **Trasporto merci** Un camion può trasportare due tipi di merci A e B. La merce A occupa un volume di 0,2 m^3 per quintale, mentre la merce B 0,3 m^3 per quintale. Il camion ha una capacità massima di 4,8 m^3, non effettua trasporti per carichi minori di 4 quintali e può trasportare al massimo 20 quintali. Chiama x e y rispettivamente il numero di quintali della merce A e quello della merce B, e rappresenta sul piano Oxy l'insieme delle coppie di valori possibili per x e y.