Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

I Giochi di Archimede

Soluzioni della Gara Biennio (versione T1)

21 novembre 2019

(1) La risposta corretta è (D).
L'unica soluzione è chiaramente $x = 1$, dato che, se fosse $0 < x < 1$, si avrebbe $\frac{1}{x} > 1$.
Quesito proposto da Sandro Campigotto.

(2) La risposta corretta è (A).
Poiché in un triangolo il prodotto di ogni lato con la relativa altezza è lo stesso (vale a dire il doppio dell'area), si ha che l'altezza relativa al lato più corto deve essere quella più lunga e viceversa. L'ordinamento corretto è pertanto $e < d < f$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(3) La risposta corretta è (B).
Dato che ogni settimana Alberto può risolvere al più 4 problemi, in 10 settimane potrà risolverne al massimo 40. Per essere certa di risolvere almeno 41 problemi, a Barbara bastano 6 settimane e 5 giorni di lavoro, a partire dall'ultimo giorno. Deve perciò iniziare di martedì.
Quesito proposto da Riccardo Zanotto.

(4) La risposta corretta è (E).
I due libri possono essere:
- o un libro giallo e un libro di viaggi (con $9 \cdot 7 = 63$ possibilità di scelta);
- o un libro giallo e un libro di poesie (con $9 \cdot 4 = 36$ possibilità di scelta);
- o un libro di viaggi e un libro di poesie (con $7 \cdot 4 = 28$ possibilità di scelta).

In tutto, le possibili scelte sono quindi $63 + 36 + 28 = 127$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(5) La risposta corretta è (E).
Nel triangolo MON gli angoli di vertici M e N misurano, rispettivamente, $61°$ e $100°$. L'angolo in O misura quindi $180° - (61° + 100°) = 19°$.
Quesito proposto da Carlo Cassola.

(6) La risposta corretta è (C).
Indicando con a e b il numero di monete, rispettivamente, del primo e del secondo, il testo del problema dice che valgono le uguaglianze $b - 2 = a + 2$ e $b + 1 = 3(a - 1)$. Di qui, $b = a + 4$ e $a + 5 = 3(a - 1)$, da cui $2a = 8$, ossia $a = 4$ e $b = 8$. In tutto, i due hanno $4 + 8 = 12$ monete.
Quesito proposto da A. Dal Zotto, S. Pelizzola, R. Zanotto.

(7) La risposta corretta è (A).
Scorrendo la panchina da sinistra a destra, contiamo quante sono le possibili disposizioni dei seguenti 3 *blocchi*: la coppia Romeo e Giulietta (RG), la coppia Elena e Paride (EP), Ulisse (U), inizialmente senza badare a quale sia l'ordine con cui compaiono le persone all'interno delle due coppie.
I 3 *blocchi* possono essere disposti in $3 \cdot 2 = 6$ modi: infatti ci sono 3 possibilità di scelta per il *blocco* al primo posto, e 2 possibilità per il *blocco* al secondo posto (quello all'ultimo posto è poi forzato).
Per ciascuna disposizione dei 3 *blocchi* suddetti, ci sono 2 ordinamenti possibili per la coppia (RG) e 2 ordinamenti possibili per la coppia (EP), che si possono combinare in $2 \cdot 2 = 4$ modi possibili.
In conclusione, il numero complessivo di disposizioni che rispettano le condizioni indicate è uguale a $6 \cdot 4 = 24$.
Quesito proposto da Paolo Negrini.

(8) La risposta corretta è (D).
Indicati con p il prezzo effettivo del maglione (senza IVA) e con p' il prezzo con IVA al 22%, si ha che $p' = p + \frac{22}{100}\, p = \frac{122}{100}\, p$, vale a dire che $p = \frac{100}{122}\, p'$. Il prezzo con IVA al 24% risulta dunque essere $p'' = p + \frac{24}{100}\, p = \frac{124}{100}\, p = \frac{124}{100} \cdot \frac{100}{122}\, p' = \frac{124}{122}\, p'$. Dato che $p' = 61$€, si ricava che $p'' = 62$€.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(9) La risposta corretta è (D).
L'angolo $\widehat{ACB}$ è complementare a $\widehat{BAC}$ (infatti il triangolo ABC è rettangolo in B). Dato che l'angolo $\widehat{ADE}$ è congruente a $\widehat{ACB}$ e che esso è complementare a $\widehat{DAE}$ (essendo il triangolo AED rettangolo in E), si conclude che l'angolo $\widehat{DAE}$ è congruente a $\widehat{BAC}$ e misura anch'esso $28°$.
Quesito proposto da Carlo Cassola.

(10) La risposta corretta è (C).
Per ciascun angolo interno retto, anche l'angolo esterno (che è il suo supplementare) è retto. Poiché in qualsiasi poligono convesso la somma degli angoli esterni è pari a un angolo giro, segue che non possono esserci più di 3 angoli retti (a meno che non si tratti di un rettangolo, cosa da escludere nel caso attuale). D'altra parte, non è difficile costruire esplicitamente poligoni convessi con 8 lati aventi precisamente 3 angoli retti.
Quesito proposto da Carlo Cassola.

(11) La risposta corretta è (A).
Detto m il numero di mattonelle, dal testo segue che $m - 1$ deve essere multiplo di 2, di 3, di 4 e di 5. Pertanto $m - 1$ deve essere multiplo del minimo comune multiplo di tali numeri, ovvero 60. Perciò deve essere $m - 1 = 60k$, con k intero positivo, ossia $m = 60k + 1$. Tra le risposte indicate, solo 121 è di questo tipo.
Quesito proposto da Carmelo Di Stefano.

(12) La risposta corretta è (B).
Poiché l'espressione è la somma di due quadrati, essa si annulla se e solo se entrambe le quantità sono nulle. Ne segue che $x = \frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3} - 3y = 0$, ossia $y = \frac{2}{9}$. Quindi $x + y = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(13) La risposta corretta è (B).
Qualunque sia il punteggio realizzato dal dado speciale (3, 4, o 6), esiste esattamente 1 punteggio su 6 del dado normale per cui la somma dei due punteggi sia 8. La probabilità che la somma sia 8 è quindi 1/6.
Quesito proposto da Sandro Campigotto.

(14) La risposta corretta è (A).
Un quadrato perfetto è multiplo di 7 se e solo se esso è della forma $(7n)^2 = 49n^2$, dove n è un numero intero. Per avere $49n^2 \leq 5000$, occorre che sia $n \leq 10$. I numeri cercati sono dunque 10, quelli ottenuti con l'espressione $49n^2$ per $1 \leq n \leq 10$.
Quesito proposto da Paolo Francini.

(15) La risposta corretta è (C).
Indichiamo le 8 persone con i numeri interi da 1 a 8, dove 1 è la persona che ha parlato per prima, 2 è quella che ha parlato per seconda, e così via.
La persona 1 afferma che 2 è cavaliere e lo stesso fa 2 riguardo 1: questo significa che, se uno di loro è cavaliere, lo sono entrambi. Perciò la coppia 1, 2 è formata o da due cavalieri o da due furfanti. La stessa cosa vale per la coppia 3, 4, per la coppia 5, 6 e per la coppia 7, 8.
Si può inoltre osservare che, se una di queste coppie è formata da due cavalieri, allora le due coppie ad essa adiacenti devono essere formate entrambe da furfanti, dato che ciascuno dei due cavalieri dichiara che il proprio vicino fuori dalla coppia è furfante.
Viceversa, le coppie vicine ad una coppia di furfanti possono essere formate sia da cavalieri che da furfanti (le affermazioni della suddetta coppia sono in ogni caso false per aver dichiarato che l'altro elemento della coppia di furfanti è un cavaliere).
Si vede quindi che o le 8 persone sono tutti furfanti (in tal caso, infatti, tutte le affermazioni risulterebbero false), oppure potrebbero esserci 1 o al massimo 2 coppie di cavalieri (in tal caso alternate a 2 coppie di furfanti), ma non di più: se ci fossero 3 coppie di cavalieri, non sarebbe possibile che ciascuna di esse fosse circondata da due coppie di furfanti.
Quesito proposto da Andrea Ciprietti e Maria Chiara Ricciuti.

(16) La risposta corretta è (E).
Detto T il piede della perpendicolare da R su PQ, dai dati del problema discende che i triangoli rettangoli KSR e QTR sono congruenti. Perciò $\overline{TQ} = \overline{KS} = \overline{PS} - \overline{PK} = 31 - 14 = 17$. Se ne ricava che $\overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ} = 31 + 17 = 48$.
Con il teorema di Pitagora, si conclude che $\overline{KQ} = \sqrt{\overline{PK}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{14^2 + 48^2} = 50$.
Quesito proposto da Camilla Casamento Tumeo.

Come ogni anno, i problemi proposti per i Giochi di Archimede sono stati, oltre che controllati e selezionati, in molti casi ampiamente modificati o riformulati dai responsabili della gara. Pertanto, nell'indicare i nominativi degli autori delle proposte, resta inteso che i responsabili sia della scelta dei quesiti, sia di eventuali errori, imprecisioni o formulazioni criticabili, sono da individuarsi esclusivamente nei curatori della gara ed in nessuna misura negli autori delle proposte. A tutti loro, ed anche a chi ha contribuito con quesiti che non sono stati inclusi nel testo della gara, va il nostro ringraziamento per la varietà, l'originalità e la qualità delle proposte presentate.

I responsabili dei Giochi di Archimede
Paolo Francini, Andrea Sambusetti