Capitolo 2

Algebra

17. Se un polinomio $P(x)$ è divisibile per $x^2 - 4$, allora

A. 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$

B. 2 non è una radice di $P(x)$

C. -2 non è una radice di $P(x)$

D. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono certamente radici di $P(x)$

E. $P(x)$ non ha radici reali

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa che

$$P(x) = \left(x^2 - 4\right) Q(x)$$

dove $Q(x)$ è il quoziente nella divisione e il resto è nullo. Poiché 2 e -2 annullano il polinomio $x^2 - 4$, e quindi il secondo membro dell'identità precedente, devono annullare anche il primo, ossia: 2 e -2 sono certamente radici di $P(x)$. Perciò la risposta esatta è la A.

Divisione tra polinomi, radici di un polinomio.

---

18. Sia $x < 2$. Allora l'espressione

$$\sqrt{4(x-2)^2}$$

A. è uguale a $4x - 8$

B. è uguale a $2x - 4$

C. non è definita

D. è uguale a $4 - 2x$

E. è uguale a $8 - 4x$

👁 *Algebra; calcolo letterale, radicali.*

✎ Un'occhiata veloce alle risposte mostra che si chiede di semplificare il radicale $\sqrt{4\,(x-2)^2}$. Occorre ricordare che in generale, detto a un generico numero reale, si ha $\sqrt{a^2} = |a|$ (e non $\sqrt{a^2} = a$ né tantomeno $\sqrt{a^2} = \pm a$, perché a può essere anche negativo e nell'ambito dei numeri reali il simbolo $\sqrt{\cdot}$ indica sempre un numero positivo o nullo). In questo caso è $a = 2\,(x-2)$, perciò $\sqrt{4\,(x-2)^2} = 2\,|x-2|$. A sua volta, l'informazione $x < 2$ implica $2\,|x-2| = 2\,(2-x) = 4 - 2x$. Perciò la risposta giusta è la D.

☞ Leggiamo le altre risposte: A, B ed E, corrispondono a qualche errore di calcolo o di ragionamento sul valore assoluto; la C deve spingerci a chiederci: siamo sicuri che l'espressione di partenza sia definita? La risposta è: sì, perché il radicando $4\,(x-2)^2$, essendo un quadrato, sicuramente non è negativo.

⚓ *Definizione di radice quadrata nel campo reale, da cui segue la relazione* $\sqrt{a^2} = |a|$. *Definizione di valore assoluto e discussione del valore assoluto di un'espressione algebrica.*

---

19. Il massimo comune divisore tra i polinomi

$$P(x) = x^3 - x^2 \qquad Q(x) = x^3 - 2x^2 + x \qquad R(x) = x^3 - x$$

è

A. $x^2 (x-1)^2$

B. x

C. x^3

D. $(x^2 - 1)(x^3 - x^2)$

E. $x^2 - x$

Algebra; polinomi.

Fattorizziamo ciascun polinomio

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 (x-1) \\ Q(x) &= x\left(x^2 - 2x + 1\right) = x(x-1)^2 \\ R(x) &= x\left(x^2 - 1\right) = x(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Confrontando le tre fattorizzazioni, si vede che il massimo comune divisore è

$$x(x-1)$$

(x e $x - 1$ sono gli unici fattori comuni, e sono presi con il minimo esponente con cui compaiono nelle tre fattorizzazioni). La risposta esatta quindi è la E.

Lo studente che ha difficoltà a comprendere il precedente ragionamento, faccia il parallelo con il procedimento che seguirebbe per cercare il massimo comune divisore fra tre numeri interi, es. $24, 21, 81$ (scomposizione in fattori primi, ecc.). Ciò che si fa con i polinomi è perfettamente analogo.

Fattorizzazione di polinomi, concetto di massimo comune divisore.

---

20. Sia m un parametro reale. Se il resto della divisione del polinomio

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7$$

per il binomio

$$x + 2$$

è 5, allora

A. occorre che sia $m = -3$

B. occorre che sia $m = 3$

C. non esiste nessun m per cui ciò sia possibile

D. m può assumere qualunque valore

E. occorre che sia $m = 0$

Algebra; polinomi.

Per definizione di quoziente e resto nella divisione di polinomi, il testo della domanda significa

$$2x^4 - mx^3 + x^2 - 7 = (x+2)\,Q(x) + 5$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente, che avrà grado 3. (Parallelo con la divisione tra numeri interi: ad es., il resto della divisione di 37 per 9 è 1, il che significa $37 = 9 \times 4 + 1$ dove 4 è il quoziente.) Se nell'identità precedente poniamo $x = -2$, otteniamo

$$32 + 8m + 4 - 7 = 0 + 5$$

equazione di primo grado in m la cui soluzione è

$$m = -3$$

La risposta esatta è quindi la A.

Lo studente che volesse avere una riprova di non avere sbagliato i calcoli, può ora eseguire la divisione

$$\left(2x^4 + 3x^3 + x^2 - 7\right) : (x+2)$$

trovando quoziente $Q(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 6$ e resto 5.

Definizione di quoziente e resto nella divisione tra polinomi.
