21. L'equazione algebrica

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

con $a > 0$, b reale e $c < 0$

A. non ammette radici reali

B. ammette un'unica radice reale

C. ammette due radici reali

D. ammette tre radici reali

E. ammette quattro radici reali

Algebra; equazioni algebriche.

Ricordiamo che un'equazione algebrica di quarto grado a coefficienti reali può avere da 0 a 4 soluzioni reali: senza qualche calcolo o considerazione su questa *specifica* equazione, quindi, non è possibile scegliere una risposta tra quelle proposte. Questa equazione di quarto grado è *biquadratica*, cioè riconducibile a un'equazione di secondo grado tramite l'introduzione dell'incognita ausiliaria $t = x^2$

$$at^2 + bt + c = 0$$

Tale equazione in t ha discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ perché si sa che $a > 0$ e $c < 0$, quindi essa ha due radici reali distinte, t_1 e t_2. Che segno hanno tali radici? Se $b = 0$ le radici hanno segni opposti perché $t_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$. Se $b \neq 0$, applichiamo la "Regola di Cartesio":

> "L'equazione $at^2 + bt + c = 0$ (a, b, c non nulli, $\Delta \geq 0$) ha tante radici positive (negative) quante sono le variazioni (permanenze) di segno dei coefficienti"

Essendo $a > 0$ e $c < 0$, la nostra equazione presenta una permanenza e una variazione, quindi le due radici hanno sempre segni opposti, diciamo $t_1 > 0$ e $t_2 < 0$.

Tornando all'incognita x, dobbiamo infine determinare gli x per cui è $x^2 = t_1$ o $x^2 = t_2$. Ora, l'equazione $x^2 = t_1$ ha due soluzioni reali e distinte (perché $t_1 > 0$), mentre l'equazione $x^2 = t_2$ non ha soluzioni reali (perché $t_2 < 0$). Di conseguenza la risposta esatta è la C.

Formula risolutiva dell'equazione di secondo grado; equazioni biquadratiche; regola di Cartesio; radice quadrata di un numero reale.

22. Sia K un parametro reale. Allora la seguente equazione nell'incognita reale x

$$x^2 - (K-2)\,x + K - 1 = 0$$

ha soluzioni opposte

A. per ogni valore di K

B. solo se $(K-2)^2 - 4\,(K-2) = 0$

C. per $K = 1$

D. per $K = 2$

E. per nessun valore di K

Algebra; equazioni algebriche con parametro.

Chiediamoci quando un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ ha soluzioni opposte. Ricordiamo che la somma delle radici dell'equazione è $-b/a$; le radici sono *opposte* se e solo se la loro somma è zero, ossia se e solo se $b = 0$.
(Alla stessa conclusione si può arrivare scrivendo la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e imponendo che $x_1 = -x_2$.)
Imponiamo dunque la condizione $b = 0$ alla nostra equazione e otteniamo

$$K - 2 = 0, \qquad \text{ossia} \quad K = 2$$

Sembrerebbe quindi di dover concludere che la risposta esatta sia la D. Tuttavia, per $K = 2$ l'equazione diventa

$$x^2 + 1 = 0$$

che in effetti non ha alcuna soluzione reale! Il ragionamento precedente non è errato: le soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = 0$ sono $\pm i$, con i unità immaginaria, e sono effettivamente opposte tra loro; tuttavia *non sono reali*. Poiché la domanda parlava di *equazione nell'incognita reale* x, la risposta esatta è la E.

In generale, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente *qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.*

Risoluzione delle equazioni algebriche di secondo grado, relazioni tra le radici e i coefficienti dell'equazione.

---

23. L'equazione nell'incognita razionale x

$$\left(4x^2 - 25\right)\left(x^3 + 9\right) = 0$$

A. non ammette soluzioni

B. ammette tre soluzioni distinte

C. ammette due soluzioni distinte

D. ammette cinque soluzioni

E. non si può risolvere, perché è di quinto grado

Algebra; equazioni algebriche.

Poiché il prodotto $(4x^2 - 25)(x^3 + 9)$ si annulla se e solo se si annulla uno dei suoi fattori ("Legge di annullamento di un prodotto"), l'equazione è soddisfatta se

$$x^2 = \frac{25}{4}, \qquad \text{cioè} \quad x = \pm\frac{5}{2}$$

o se

$$x^3 = -9, \qquad \text{cioè} \quad x = -\sqrt[3]{9}$$

Poiché i numeri $\pm\, 5/2$ sono razionali (quozienti fra numeri interi), mentre il numero $-\sqrt[3]{9}$ è irrazionale, l'equazione ha due soluzioni razionali distinte. Quindi la risposta esatta è la C.

Per affermare che $\sqrt[3]{9}$ (e quindi il suo opposto) è irrazionale, lo studente può ricordare il seguente fatto generale:

> "La radice n-esima di un numero intero (con $n \geq 2$) è un numero intero oppure è un numero irrazionale"

Poiché $2^3 = 8 < 9$ e $3^3 = 27 > 9$, non esiste alcun numero intero il cui cubo sia 9, dunque $\sqrt[3]{9}$ non è intero, e perciò è irrazionale.

In questo quesito è importante la precisazione (sottolineata nel testo!) che le soluzioni si cercano nell'insieme dei numeri razionali. Chi non avesse notato questa precisazione (ma avesse fatto comunque dei calcoli esatti), avrebbe scelto la risposta B, errata. Come già osservato nel quesito n° 22, dovendo rispondere a una domanda sul numero di soluzioni di un'equazione, è fondamentale tenere ben presente qual è l'insieme numerico in cui si cercano tali soluzioni.

Legge di annullamento di un prodotto; radicali; razionalità o irrazionalità della radice n-esima di un intero.

---

24. Il seguente sistema nelle incognite reali x ed y

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

ammette

A. due soluzioni

B. nessuna soluzione

C. una soluzione

D. quattro soluzioni

E. più di quattro soluzioni

Algebra; sistemi di equazioni.

Usando il prodotto notevole $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$, riscriviamo il sistema come

$$\begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

e quindi, ricavando $y = x - 1$ dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, troviamo l'equazione di secondo grado in x

$$x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = 1, \qquad \text{cioè} \quad 3x^2 - 3x = 0$$

che dà $x = 0$, $x = 1$. Risostituendo nell'equazione $y = x - 1$ abbiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La risposta esatta quindi è la A.
