Capitolo 1

Aritmetica

1. La somma $2^{15} + 2^{15}$ è uguale a

   A. 2^{30}

   B. 2^{16}

   C. 4^{15}

   D. un numero irrazionale

   E. 4^{30}

Aritmetica; numeri interi; potenze.

Si ha

$$2^{15} + 2^{15} = 2 \times 2^{15} = 2^{16}$$

La risposta esatta è la B.

La proprietà delle potenze che si è usata (e che si studia a scuola) riguarda il prodotto di due potenze di uguale base ($a^m a^n = a^{m+n}$); non c'è invece nessuna proprietà per la somma $a^m + a^n$ (e non la si studia proprio perché non c'è). Le risposte errate A, C ed E riflettono vari errori di calcolo, basati proprio su presunte proprietà per la somma. Infine, la risposta D è chiaramente assurda perché 2^{15} è certamente un intero e quindi lo è anche $2^{15} + 2^{15}$.

Proprietà delle potenze.

---

2. Si considerino i seguenti numeri

$$91 \qquad 100 \qquad 231 \qquad 440 \qquad 1003$$

Quanti di essi sono numeri primi?

A. Nessuno

B. Uno

C. Due

D. Tre

E. Quattro

Aritmetica; numeri interi; numeri primi.

I numeri 100 e 440 non sono primi perché pari (divisibili per 2).

Il numero 231 non è primo perché è divisibile per 3 (si ricordi il criterio di divisibilità per 3: "se la somma delle cifre di un numero è divisibile per 3, il numero è divisibile per 3"; nel nostro caso $2 + 3 + 1 = 6$ è divisibile per 3, quindi lo è anche 231).

Il numero 91 è primo? Ricordiamo che, in generale, per decidere se n è primo occorre verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{n}$. Osserviamo poi che per i criteri di divisibilità, 91 non è divisibile per $2, 3, 5$; è divisibile per 7? Sì, perché

$$91 = 70 + 21 = 7 \times 10 + 7 \times 3 = 7 \times 13$$

Il numero 1003 è primo? I criteri di divisibilità dicono che non è divisibile per $2, 3, 5, 11$. Per essere certi che sia primo, dobbiamo verificare che non sia divisibile per nessun numero primo $\leq \sqrt{1003}$, ossia (oltre a quelli già elencati), per

$$7, 13, 17, 19, 23, 29, 31$$

Carta, penna e pazienza ci dicono che

1003 diviso 7 dà 143 e resto 2;
1003 diviso 13 dà 77 e resto 2;
1003 diviso 17 dà 59 e resto 0

Dunque $1003 = 17 \times 59$, e neanche 1003 è primo. Quindi la risposta esatta è la A.

Ricerca dei fattori primi di un intero; criteri di divisibilità.

---

3. Nel sistema di numerazione ternaria le tre sole cifre usate sono 0, 1 e 2. Quindi, ad esempio, si hanno le uguaglianze seguenti (nelle quali il numero in basso ricorda la base):

$$0_{10} = 0_3, \quad 1_{10} = 1_3, \quad 2_{10} = 2_3, \quad 3_{10} = 10_3, \quad 4_{10} = 11_3, \quad 5_{10} = 12_3$$

eccetera. Quale dei seguenti numeri è 912_{10} in forma ternaria?

A. 12101_3

B. 20121_3

C. 1020210_3

D. 210212_3

E. 1010101_3

Aritmetica; numeri interi; rappresentazione di un numero intero in base 3.

Bisogna sapere che se un numero intero positivo è rappresentato in base 3 dalla sequenza di (diciamo) $k+1$ cifre

$$a_k\, a_{k-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0$$

dove ogni cifra vale 0, 1 o 2, allora la sua rappresentazione in base 10 sarà data da

$$a_k \times 3^k + a_{k-1} \times 3^{k-1} + \ldots + a_2 \times 3^2 + a_1 \times 3^1 + a_0 \times 3^0$$

Per identificare la risposta corretta si può allora procedere tramite controllo diretto: ad esempio il numero 12101_3 della risposta A è formato da 5 cifre e quindi corrisponde a

$$1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 81 + 54 + 9 + 0 + 1 = 145_{10}$$

Il fatto che il valore 145 sia piuttosto lontano da 912 suggerisce a questo punto che la risposta corretta sarà probabilmente data da una delle due rappresentazioni più lunghe (la C o la E). Per la C si trova

$$1 \times 3^6 + 0 \times 3^5 + 2 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 729 + 162 + 18 + 3 = 912_{10}$$

per cui la risposta esatta è la C.

Rappresentazione di un numero intero in base diversa da quella decimale.