4. Siano a e b due interi positivi tali che il loro prodotto ab sia multiplo di 10. Allora

   A. a e b sono entrambi pari

   B. a e b sono entrambi multipli di 10

   C. a è multiplo di 10 oppure b è multiplo di 10

   D. a è pari e b è multiplo di 5

   E. a è pari oppure b è pari

Aritmetica; numeri interi.

Il testo dice che il prodotto ab può essere uguale a $10, 20, 30, ...$ e che a e b sono interi positivi, cioè possono assumere i valori $1, 2, 3, ...$ Basta considerare il caso $ab = 10$ ed esplicitare in una tabella i valori corrispondenti di a e di b per constatare che le risposte A, B, C e D sono false.

$a =$	1	2	5	10
$b =$	10	5	2	1
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
	A e B false	C falsa	D falsa	

Per esclusione la risposta esatta è la E.

Abbiamo individuato indirettamente la risposta esatta mostrando che 4 delle 5 risposte sono false. Volendo invece fare un ragionamento diretto, si può procedere così.

Il punto di partenza è la seguente proprietà dei numeri primi:

> “Se un numero *primo* p divide ab, allora p divide a oppure divide b”

(per inciso facciamo notare che tale proprietà non vale se p non è primo: ad esempio, il numero $p = 6$ divide $4 \times 9 = 36$, ma non divide né $a = 4$ né $b = 9$).
Poiché $10 = 2 \times 5$ e ab è multiplo di 10, in particolare ab è multiplo sia di 2 che di 5, che sono numeri primi. Perciò si può concludere che

2 divide a oppure divide b, e inoltre 5 divide a oppure divide b.

Leggendo ora le risposte, si vede che l’unica ad essere conseguenza di questa affermazione è la E (se 2 divide a o b, allora a è pari oppure b è pari).

Scomposizione di un numero intero in fattori primi, numeri primi e divisibilità.

---

5. Se una certa operazione sugli elementi di un insieme ha come risultato un elemento dell'insieme si usa dire che tale insieme è *chiuso* rispetto a questa operazione.
L'insieme X dei quadrati degli interi positivi

$$X = \{1, 4, 9, 16, ...\}$$

è chiuso rispetto

A. all'addizione

B. alla moltiplicazione

C. alla divisione

D. all'estrazione di radice quadrata

E. a nessuna operazione

Aritmetica; numeri interi; potenze.

L'insieme X è costituito dai numeri n^2, al variare di n tra gli interi positivi. Presi due generici numeri di X, n^2 e m^2, si vede subito che

$$n^2m^2 = (nm)^2$$

ossia: il prodotto di due elementi di X è un elemento di X. Dunque la risposta B è esatta.

Osserviamo che, viceversa,

la somma o il quoziente di due quadrati in generale non è un quadrato (es. $2^2 + 3^2 = 13$ non è un quadrato, e $2^2/3^2 = 4/9$ non è neppure un intero);

la radice di un quadrato in generale non è un quadrato (es. $\sqrt{2^2} = 2$ non è un quadrato).

Proprietà delle potenze.

---

6. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   A. Se x è un numero irrazionale, anche x^2 lo è

   B. Se x è un numero razionale, anche $x + \pi$ lo è

   C. Se x è un numero irrazionale, allora $x^2 + \pi$ non può essere intero

   D. Se x è un numero irrazionale, allora $x/2$ può essere razionale

   E. Se x è un numero irrazionale, allora $x + \pi$ può essere intero

Aritmetica; numeri razionali e irrazionali.

La A è falsa: ad esempio, $x = \sqrt{2}$ è irrazionale, ma $x^2 = 2$ è intero (e quindi razionale).

La B è falsa: ad esempio, $x = 0$ è razionale, ma $x + \pi = 0 + \pi = \pi$ è irrazionale.

La C è falsa: ad esempio, se $x = \sqrt{4 - \pi}$, x è irrazionale, ma $x^2 + \pi = 4 - \pi + \pi = 4$ è intero.

La D è falsa: se $x/2$ è razionale, anche x (che è il suo doppio) è razionale; perciò, viceversa, se x è irrazionale allora $x/2$ non può essere razionale.

La E è vera: ad esempio, $x = -\pi$ è irrazionale, eppure $x + \pi = -\pi + \pi = 0$ è intero.

Perciò la risposta esatta è la E.

L'insieme di tutti i numeri razionali costituisce un *campo*, quindi eseguendo somme, differenze, prodotti e quozienti sui numeri razionali, otteniamo ancora numeri razionali. Lo stesso vale per i numeri reali. Invece i numeri irrazionali sono quei numeri reali che non sono razionali: questo insieme numerico non è un campo, perciò non è *chiuso* rispetto alle operazioni aritmetiche (v. quesito n° 5). È questo il motivo per cui, di fronte alle affermazioni proposte in questa domanda, dobbiamo anzitutto diffidare e cercare un controesempio. Il controesempio, per le quattro risposte errate, è molto facile da trovare, tranne forse per la C. In quel caso, il modo naturale di ragionare è:

"Per mostrare che la frase C è falsa, devo far sì che sia $x^2 + \pi = n$ con n intero, ossia $x^2 = n - \pi$"

Dovremo allora scegliere un intero $n > \pi$ (perché $x^2 \geq 0$), ad es. $n = 4$, e poi porre $x = \sqrt{4 - \pi}$. Questo numero è effettivamente irrazionale perché, se fosse razionale, anche il suo quadrato $x^2 = 4 - \pi$ lo sarebbe, e quindi lo sarebbe π, assurdo.

Operazioni aritmetiche sui numeri razionali e irrazionali; irrazionalità di π.
