Capitolo 7

Trigonometria

118. La misura in radianti di un angolo di 20° è

A. $\frac{\pi}{7}$

B. $\frac{\pi}{8}$

C. $\frac{\pi}{9}$

D. $\frac{\pi}{10}$

E. $\frac{\pi}{18}$

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di 180°. Poiché

$$20^\circ = \frac{180^\circ}{9}$$

la misura in radianti dell'angolo di 20° è $\frac{\pi}{9}$. Quindi la risposta esatta è la C.

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti.

---

119. Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A. $\sin\alpha + \sin\beta = 0$

B. $\cos\alpha + \cos\beta = -1$

C. $\tan\alpha + \tan\beta = 0$

D. $\cos\alpha = \cos\beta$

E. $\tan\alpha = \tan\beta$

👁 *Trigonometria; angoli supplementari.*

✎ Gli angoli α e β sono *supplementari* (la loro somma è π), quindi – come si constata, ad es., sulla circonferenza trigonometrica) – soddisfano le relazioni

$$\sin\alpha = \sin\beta \qquad ; \qquad \cos\alpha = -\cos\beta$$

Nessuna di queste due compare tra le risposte proposte, tuttavia A, B e D vanno scartate perché in contrasto con queste uguaglianze. Le altre due risposte riguardano la funzione tangente. Notiamo che dalle due uguaglianze scritte sopra segue anche

$$\tan\alpha = -\tan\beta$$

che è equivalente alla C (e in contraddizione con la E). Quindi la risposta esatta è la C.

⚓ *Relazione tra seno, coseno e tangente di angoli supplementari.*

---

120. Se un angolo misura 15°, la sua misura in radianti è

A. minore di $0,25$ rad

B. compresa fra $0,25$ rad e $0,50$ rad

C. compresa fra $0,50$ rad e $0,75$ rad

D. compresa fra $0,75$ rad e 1 rad

E. maggiore di 1 rad

Trigonometria; misura degli angoli.

Ricordiamo che un angolo di π radianti corrisponde a un angolo di 180°. Poiché

$$15° = \frac{180°}{12}$$

l'angolo di 15° misura $\dfrac{\pi}{12}$ rad.

Quanto vale all'incirca il numero $\pi/12$ in forma decimale? Invece che dividere $3,14$ (un'approssimazione di π) per 12, ragioniamo così: π è "poco più" di 3, quindi $\pi/12$ è "poco più" di $3/12$, cioè di $1/4$. Quindi l'angolo misura "poco più" di $1/4$ rad, e la risposta esatta è la B.

(Il risultato della divisione di $3,14$ per 12, eseguita con carta e penna, dà il valore troncato $0,26$.)

Conversione delle misure degli angoli da gradi a radianti; confronti numerici.

---

121. L'espressione

$$\cos^2 1 - \sin^2 1$$

è uguale a

A. $-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$

B. $\cos 2$

C. 1

D. $2\cos 1 - 2\sin 1$

E. $-\dfrac{1}{2}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Anzitutto, osserviamo che l'angolo di 1 rad *non* rappresenta un valore notevole per le funzioni seno e coseno, quindi occorre resistere alla tentazione di scegliere frettolosamente, tra le risposte, una che dia per risultato una "cifra tonda". L'espressione del testo ci suggerisce invece di usare l'identità

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

Applicata ad $\alpha = 1$, essa dà

$$\cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2$$

Quindi la risposta esatta è la B.

Formule di duplicazione.

---

122. L'uguaglianza

$$\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$$

è verificata

A. solo per $x = \dfrac{\pi}{2}$

B. per infiniti valori di x, ma non per ogni x reale

C. per ogni x reale

D. per nessun x reale

E. solo per $x = 0$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Osserviamo che

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(formula di duplicazione), mentre

$$\cos^4 x - \sin^4 x = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

(prodotto notevole $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, e relazione fondamentale della trigonometria $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$), quindi le due espressioni scritte sono identicamente uguali. La risposta esatta è la C.

Lo studente constati che l'uguaglianza data è verificata per i due valori notevoli $x = \pi/2$ e $x = 0$. Questo fatto porta a concludere che A, D, E sono risposte errate. Ma per scegliere la risposta giusta tra B e C bisogna ragionare come si è detto.

Identità fondamentale della trigonometria; formula di duplicazione; prodotti notevoli.

---

123. Sia α la misura in radianti di un angolo con $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Se è

$$\cos\alpha = \frac{1}{4}$$

allora

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

è uguale a

A. $\dfrac{1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

B. $\dfrac{-1+\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

C. $\dfrac{-1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

D. $\dfrac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$

E. $\dfrac{3}{4}$

Trigonometria; identità trigonometriche.

Per le formule di addizione, si ha

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} =$$

(poiché $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$$

Ora sfruttiamo le altre informazioni: α del quarto quadrante e $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, perciò

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

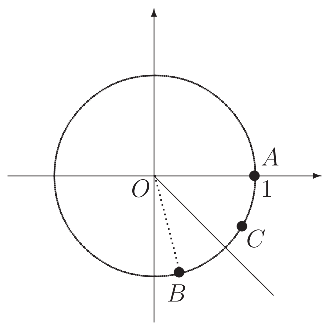
In conclusione

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}$$

e la risposta esatta è la D.

☞ Una figura anche piuttosto grossolana avrebbe potuto convincere a priori che l'angolo $\alpha + \pi/4$ si trova nel quarto quadrante, e quindi ha seno negativo.

(Si disegni, sulla circonferenza trigonometrica, l'angolo α che si trova nel quarto quadrante e ha coseno $1/4$ – individuato nella figura seguente dall'arco che va dal punto A al punto B di ascissa $1/4$ – e poi lo si incrementi di mezzo angolo retto. Si ottiene così il punto C in figura e l'angolo $\alpha + \pi/4$ è quello che insiste sull'arco AC.)



Questa costruzione geometrica avrebbe permesso di scartare subito tutte le risposte tranne due: C e D. Per scegliere la risposta esatta, comunque, è necessario il calcolo.

⚓ *Formule di addizione; relazioni tra seno e coseno di un angolo, in base al quadrante.*
